


252
4 I
12

RÉSUMÉS ANALYTIQUES

PAR

M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC. ....



À TURIN
DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1833.

RÉSUMÉS ANALYTIQUES

Avertissement

L'expérience de l'enseignement m'a prouvé qu'on peut simplifier encore sur plusieurs points l'étude de l'analyse. D'autre part des recherches approfondies sur différentes branches des sciences mathématiques m'ont conduit à des résultats nouveaux et à de nouvelles méthodes qui fournissent la solution d'un grand nombre de questions diverses. Déjà quelques unes de ces méthodes se trouvent indiquées dans des notes que renferme le bulletin des sciences, et présentées avec plus d'étendue dans les deux mémoires litographiés en 1831 et 1832. En attendant que je puisse donner à ces matières de plus amples développements par la publication de traités spéciaux ou la reprise des Exercices de mathématiques; j'ai pensé qu'une série d'articles destinés à offrir le résumé des théories les plus importantes de l'analyse, soit anciennes soit nouvelles, particulièrement des théories qu'embrasse l'analyse algébrique, et des méthodes qui en rendent l'exposition plus facile, pourrait intéresser les géomètres et ceux qui s'adonnent à la culture des sciences. Tel est le but que je me propose dans le présent ouvrage qui paraîtra par cahiers à des époques plus ou moins rapprochées les unes des autres, suivant le plus ou moins de temps que les circonstances me permettront d'y consacrer.

RÉSUMÉS ANALYTIQUES

§ 1.er *Sur les nombres figurés.*

Désignons par $(m)_n$ le nombre des produits qu'on peut former avec m lettres a, b, c,... combinées n à n. Parmi ces produits, le nombre de ceux qui renfermeront la lettre a sera évidemment

$$(m-1)_{n-1},$$

et le nombre de ceux qui renfermeront seulement les $m-1$ autres lettres b, c, etc. ... sera

$$(m-1)_n.$$

On aura donc

$$(m)_n=(m-1)_n+(m-1)_{n-1}. \tag{1}$$

De plus, si l'on forme 1.° les produits qui renferment la lettre a, et dont le nombre est $(m-1)_{n-1}$; 2.° les produits qui renferment la lettre b, et dont le nombre est encore $(m-1)_{n-1}$, etc. ... on obtiendra en tout

$$m(m-1)_{n-1}$$

produits. Mais en opérant de cette manière on obtiendra n fois chaque produit. Car, si $n=3$ par exemple, le produit abc sera compris et parmi ceux qui renferment la lettre a, et parmi ceux qui renferment la lettre b, et parmi ceux qui renferment la lettre c. Donc

$$(m)_n=\frac{m}{n}(m-1)_{n-1}. \tag{2}$$

Observons enfin qu'on aura évidemment

$$(m)_1=m, \tag{3}$$

et qu'à chaque produit formé avec n lettres prises dans la suite a, b, c ..., correspond un seul produit formé avec les $m-n$ lettres restantes; d'où il suit qu'on trouvera généralement

$$(m)_n=(m)_{m-n}. \tag{4}$$

Si au nombre m, qui doit toujours être égal ou supérieur à n, on attribue successivement les valeurs

$$n,\ n+1,\ n+2, \ldots$$

l'expression $(m)_n$ engendrera la suite des nombres

$$(n)_n = 1,\quad (n+1)_n = (n+1)_1 = n+1,\quad (n+2)_n,\quad (n+3)_n,\ \text{etc.}$$

qu'on appelle les nombres *figurés* de l'ordre n. Ceux du premier ordre seront, en vertu de la formule (3), les nombres *naturels*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots;$$

et généralement ceux du premier, du second, du troisième ordre, etc. composeront la seconde, la troisième, la quatrième ..... lignes horizontales du triangle arithmétique de Pascal, savoir,

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1	1,	.....
	1,	$(2)_1$,	$(3)_1$,	$(4)_1$,	$(5)_1$,	$(6)_1$,	$(7)_1$,	$(8)_1$,	.....
		1,	$(3)_2$,	$(4)_2$,	$(5)_2$,	$(6)_2$,	$(7)_2$,	$(8)_2$,	.....
			1,	$(4)_3$,	$(5)_3$,	$(6)_3$,	$(7)_3$,	$(8)_3$,	.....
				1,	$(5)_4$,	$(6)_4$,	$(7)_4$,	$(8)_4$,	.....
					1,	$(6)_5$,	$(7)_5$,	$(8)_5$,	.....
						1,	$(7)_6$,	$(8)_6$,	.....
							1,	$(8)_7$,	.....
								1	.....

ou

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	.....
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	.....
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	.....
			1,	4,	10,	20,	35,	56,	.....
				1,	5,	15,	35,	70,	.....
					1,	6,	21,	56,	.....
						1,	7,	28,	.....
							1,	8,	.....
								1,	.....

Dans ce tableau, les termes de la prémière suite sont tous égaux à l'unité. De plus, le premier terme de chaque nouvelle suite, équivalent lui même à l'unité, est avancé d'un rang vers la droite par rapport au premier terme de la suite précédente; et chaque nouveau terme d'une suite quelconque est, en vertu de la formule (1), la somme qu'on obtient lorsqu'on ajoute au terme précédent de la même suite le nombre qui se trouve

immédiatement au-dessus. Il en résulte que le n^{me} terme de la suite des nombres figurés de l'ordre $m+1$ est la somme des n premiers nombres figurés de l'ordre m. On a donc

(5) $$1+(m+1)_m+(m+2)_m+\ldots+(m+n-1)_m=(m+n)_{m+1}.$$

Au reste la formule (5) peut-être déduite immédiatement de la formule (1).

De la formule (2) on tire successivement

$$(m)_n=\frac{m}{n}(m-1)_{n-1},\quad (m-1)_{n-1}=\frac{m-1}{n-1}(m-2)_{n-2},\quad \text{etc.}$$

et par suite

(6) $$(m)_n=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m-2}{n-2}\cdots\frac{m-(n-1)}{n-(n-1)},$$

ou

(7) $$(m)_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}$$

Cela posé, la formule (5) donnera

(8) $$1+(m+1)+\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots\ldots m}=\frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{1.2\ldots(m+1)}$$

Ainsi, en particulier

(9) $$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(10) $$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3},$$

(11) $$1+4+10+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4},$$

etc.

En vertu de l'équation (9), les sommes des n premiers termes des progressions arithmétiques

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ (n-1),$$

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ldots\ a+(n-1)b,$$

seront respectivement

$$(12) \qquad 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

et

$$(13) \qquad na + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\,b = na + \frac{n(n-1)}{2}\,b = n\left(a + \frac{(n-1)}{2}\,b\right).$$

Le second membre de la formule (12) ou (13) est le produit de n par la demi-somme du premier et du dernier terme de la progression que l'on considère.

Si l'on indique la somme des n premiers termes d'une suite par la lettre S placée devant le n^{e} terme, les équations (9), (10), (11) pourront s'écrire comme il suit:

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} & S(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \\ & S\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}, \\ & S\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ & \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} & S(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \\ & S[n(n+1)] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \\ & S[n(n+1)(n+2)] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \\ & \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Si des boulets de même diametre sont distribués, dans plusieurs couches superposées, de manière à figurer une pyramide triangulaire, et dans chaque couche, sur plusieurs files parallèles, de manière à figurer un triangle équilatéral, le nombre des boulets compris dans une couche triangulaire, ou dans la pyramide, se trouvera déterminé par la formule (9) ou (10), et sera ce qu'on nomme un nombre *triangulaire* ou un nombre *pyramidal*. Donc les nombres triangulaires et pyramidaux se confondent avec les nombres figurés du second et du troisième ordre.

---

§. 2. *Développement du produit de plusieurs binomes, ou d'une puissance entière et positive de l'un d'entre eux ; théorème de Fermat sur les nombres premiers.*

Considérons m binomes différents, de la forme

$$x + a,\quad x + b,\quad x + c,\ \ldots..$$

En les multipliant l'un par l'autre, on aura

(1) $$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots = x^m + (a+b+c+\ldots)x^{m-1} + (ab+ac\ldots+bc\ldots)x^{m-2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + abc\ \ldots..$$

De plus, en posant

$$a = b = c = \ldots..,$$

on trouvera

$$a + b + c \ldots = ma = (m)_1 a,$$

$$ab + ac + \ldots + bc \ldots = (m)_2 a^2,$$

etc.

$$abc\ \ldots.. \qquad\qquad = a^m.$$

Donc par suite

(2) $$(x + a)^m = x^m + (m)_1 a x^{m-1} + (m)_2 a^2 x^{m-2} + \ldots.. + x^m.$$

Dans le second membre de l'équation (2), les coefficients des diverses puissances de x et de a, savoir,

$$1,\ (m)_1,\ (m)_2,\ \ldots\ (m)_2,\ (m)_1,\ 1$$

sont précisement les nombres qui composent la $(m + 1)^{me}$ colonne verticale du triangle arithmétique de Pascal, et le coefficient de

$$a^{m-n}x^n \quad \text{ou de} \quad a^n x^{m-n}$$

est

(4) $$(m)_n = (m)_{m-n},$$

ou, en vertu de la formule (7) du § 1.er,

(5) $$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots(m-n)}.$$

On peut s'assurer que les fractions contenues dans les deux membres de la formule (5) sont égales en les réduisant au même dénominateur.

Si l'on pose successivement

$$m = 2\,,\ m = 3,\ m = 4,\ m = 5\,,\ \text{etc.} \ldots$$

on trouvera, en prenant pour coefficients les divers termes des colonnes verticales du triangle arithmétique,

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2\,,$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3\,,$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4\,,$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5\,,$$

etc.

Lorsque, dans la formule (2), on pose $a = 1$, elle donne

$$(6) \qquad (x + 1)^m = x^m + (m)_1 x^{m-1} + (m)_2 x^{m-2} + \ldots + 1\,.$$

Si l'on fait de plus $x = 1$, on trouvera

$$(7) \qquad 2^m = 1 + (m)_1 + (m)_2 + \ldots + (m)_2 + (m)_1 + 1\,.$$

Donc les divers coefficients, dont le nombre est $m + 1$, fournissent une somme égale à 2^m. Lorsque m est un nombre premier, tous les termes de la suite contenue dans le second membre de la formule (7) sont, à l'exception du premier et du dernier, des multiples de m. Donc alors 2^m, divisé par m, donne 2 pour reste. Dans le même cas, n étant un nombre entier quelconque,

$$(n + 1)^m$$

divisé par m, donne, en vertu de la formule (6), le même reste que $n^m + 1$, et par suite

$$(n + 1)^m - (n + 1)$$

donne le même reste que

$$n^m - n.$$

Donc $2^m - 2$ étant divisible par m, on pourra en dire autant de $3^m - 3$, puis de $4^m - 4$, etc. ... et généralement de

$$n^m - n = n(n^{m-1} - 1)$$

Donc, si n n'est pas divisible par le nombre premier m, n^{m-1} divisé par m donnera l'unité pour reste; ce qui constitue le théorème de Fermat sur les nombres premiers.

Lorsque dans l'équation (1) on remplace a, b, c, ... par $-a$, $-b$, $-c$, ... on en tire

$$(7) \qquad (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

les valeurs de A_1, A_2, ... A_m étant

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -(a+b+c+\ldots) \\ A_2 = ab + ac + \ldots + bc + \ldots\ldots \\ \text{etc.} \\ A_m = (-1)^m\, abc \ldots = \pm\, abc \ldots\ldots \end{array} \right.$$

---

§ 3. *Des variables et des fonctions en général; et en particulier des fonctions entières d'une seule variable. Relations qui existent entre les coefficients des puissances entières et positives d'un binome.*

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appellée la *limite* de toutes les autres. Ainsi par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandisque le nombre de leur cotés croit de plus en plus, etc. ...

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit*, ou une *quantité infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif* indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit

d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles qui prend alors le nom de *variable indépendante*, et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes d'entre elles étant données, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*, et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'algèbre, et la trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple

$$ax\,,\ x^m\,,\ A^x\,,\ \mathrm{L}(x)\,,\ldots..$$

sont des fonctions de la variable x;

$$x+y\,,\quad x^y\,,\quad xyz\,,\ldots..$$

sont des fonctions des variables x, y on x, y et z, ...

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appellées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$\mathrm{L}(y)=x\,,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction devenue explicite par la résolution de l'équation donnée sera

$$y=A^x\,.$$

Soit maintenant y une fonction de x, qui, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, admette constamment une valeur unique et finie. *La fonction y sera* continue *par rapport à x entre les limites données, si entre ces limites un accroissement infiniment petit de la variable x produit toujours un accroissement infiniment petit*

de la fonction elle-même. On dit encore que la fonction y est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction *continue* de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a, pour cette valeur particulière, *solution de continuité*.

D'après ces définitions, A étant un nombre et a une quantité constante, chacune des fonctions

$$a + x\,,\; a - x\,,\; ax\,,\; \frac{a}{x}\,,\; x^a,\; A^x\,,\; \mathrm{L}(x)$$

sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur se trouve comprise, pour les fonctions

$$a + x\,,\; a - x,\; ax,\; A^x,$$

entre les limites $x = -\infty$, $x = \infty$; pour la fonction

$$\frac{a}{x}$$

entre les limites $x = -\infty$, $x = 0$, ou bien entre les limites $x = 0$, $x = \infty$; enfin pour les fonctions

$$x^a\,,\; \mathrm{L}(x)$$

entre les limites $x = 0$, $x = \infty$. La fonction $\frac{a}{x}$ devient discontinue pour $x = 0$.

Il semble qu'on devrait nommer *fonctions algébriques* toutes celles que fournissent les opérations de l'algèbre. Mais on a reservé particulièrement ce nom à celles que l'on forme en n'employant que les premiers opérations algébriques, savoir, l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, enfin l'élévation à des puissances fixes; et, dès qu'une fonction renferme des exposants variables ou des logarithmes, elle prend le nom de fonction exponentielle ou *logarithmique*.

Les fonctions que l'on nomme algébriques se divisent en fonctions *rationnelles* et fonctions *irrationnelles*. Les fonctions rationnelles sont celles dans lesquelles la variable ne se trouve élevée qu'à des puissances entières. On appelle en particulier *fonction entière* tout polynome qui ne renferme que des puissances entières de la variable et *fonction fractionnaire* ou *fraction rationnelle* le quotient de deux semblables polynomes. Le degré d'une fonction entière est l'exposant de la plus haute puissance de x dans cette même fonction. La fonction entière du premier degré s'appelle aussi *fonction linéaire*, parceque

dans l'application à la géométrie on s'en sert pour représenter l'ordonnée d'une ligne droite. Toute fonction entière ou fractionnaire est par cela même rationnelle, et toute autre espèce de fonctions algébriques est irrationnelle.

Les définitions précédentes étant admises, considérons une fonction entière de x du degré m, c'est-à-dire un polynome de la forme

$$(1) \qquad P = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m .$$

Si, dans ce polynome, on pose $x = a + z$, il se changera en une fonction entière de z, de sorte qu'on aura, quel que soit z,

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

$$= C_0 z^m + C_1 z^{m-1} + C_2 z^{m-2} + \ldots\ldots + C_{m-1} z + C_m ,$$

et par conséquent, quel que soit x,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m \\ & = C_0 (x-a)^m + C_1 (x-a)^{m-1} + C_2 (x-a)^{m-2} \ldots + C_{m-1} (x-a) + C_m ; \end{aligned} \right.$$

le coefficient C_0 étant précisement égal à A_0. Donc, tout polynome ordonné, suivant les puissances descendantes et entières de x peut être transformé en un autre polynome ordonné suivant les puissances descendantes et entières de $x - a$.

Lorsque le polynome (1) est algébriquement divisible par un facteur du premier degré et de la forme $x - a$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$P = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = (x - a) Q ,$$

Q désignant une nouvelle fonction entière du degré $m - 1$, il est clair que ce polynome s'évanouit pour $x = a$; en d'autres termes $x = a$ est une racine de l'équation

$$(3) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 .$$

Réciproquement, lorsque a est une racine de l'équation (3), C_m se réduit nécessairement à zéro dans le second membre de la formule (2), et cette formule donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \\ & = (x - a) \left[C_0 (x - a)^{m-1} + C_1 (x - a)^{m-2} + \ldots + C_{m-1} \right] ; \end{aligned} \right.$$

donc alors le polynome (1) est divisible par $x - a$, ou de la forme

$$(5) \qquad P = (x - a) Q .$$

Si b désigne une seconde racine de l'équation (3), b étant différent de a, alors en posant $x=b$ on fera évanouir le produit $P=(x-a)Q$ et par conséquent le polynome Q, puisque $x-a$ ne s'évanouira pas pour $x=b$. On aura donc encore

$$Q=(x-b)R,$$

et par suite

$$P=(x-a)(x-b)R,$$

R désignant un polynome du degré $m-2$, etc. ... En continuant ainsi on prouvera que, si l'équation (3) admet m racines distinctes

$$a, b, c, \ldots\ldots$$

le polynome P sera le produit des facteurs

$$x-a, \quad x-b, \quad x-c, \ldots\ldots$$

par une fonction entière du degré zéro, c'est-à-dire par un coefficient constant qui ne pourra différer de A_0; en sorte qu'on aura

(6) $$P=A_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$$

Donc alors l'équation (3) pourra-être présentée sous la forme

(7) $$A_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots=0.$$

Le premier membre de l'équation (7) ne pouvant s'évanouir qu'avec l'un des facteurs

$$x-a, \quad x-b, \quad x-c, \ldots\ldots$$

il en résulte que l'équation (3) du degré m ne saurait admettre plus de m racines distinctes.

Soit maintenant

(8) $$B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + B_{m-1} x + B_m$$

une nouvelle fonction entière de x d'un degré ou égal ou inférieur à m, B_0 pouvant être nul. Si cette nouvelle fonction devient égale à la première pour plus de m valeurs distinctes de x, on aura nécessairement

$$B_0=A_0, \quad B_1=A_1, \ldots\ldots B_m=A_m.$$

Car dans le cas contraire, la différence entre les fonctions (1) et (8) se réduisant à zéro, pour plus de m valeurs distinctes de x, l'équation

$$(A_0-B_0)x^m+(A_1-B_1)x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}-B_{m-1}=0$$

serait une équation du degré m qui admettrait plus de m racines; ce qui est absurde. On peut donc énoncer la proposition suivante.

1.er Théorème. *Si deux fonctions entières de la variable x deviennent égales pour un nombre de valeurs de cette variable supérieur au degré de chacune de ces fonctions, les coefficients des puissances semblables de x seront les mêmes dans les deux fonctions dont il s'agit.*

On en déduit comme corollaires ces autres théorêmes.

2.e Théorême. *Dans deux fonctions entières de x, les coefficients des puissances semblables de x sont les mêmes, lorsque ces deux fonctions sont égales, quel que soit x.*

3.e Théorême. *Dans deux fonctions entières de x, les coefficients des puissances semblables de x sont les mêmes, lorsque ces fonctions deviennent égales pour toutes les valeurs entières de la variable x, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.*

4.e Théorême. *Dans deux fonctions entières de plusieurs variables x, y, z, ... les coefficients des produits des puissances semblables de x, y, z, ... sont les mêmes, lorsque ces fonctions deviennent égales pour des valeurs quelconques des variables.*

5.e Théorême. *Si deux fonctions entières de plusieurs variables x, y, z, ... deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de x, y, z, ... ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent des limites données, les produits des puissances semblables de x, y, z, ... offriront les mêmes coefficients dans ces deux fonctions qui par suite seront identiquement égales, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, z, ...*

Pour montrer une application de ces théorêmes, multiplions l'une par l'autre les deux fonctions entières

$$(1+x)^k = 1 + (k)_1 x + (k)_2 x^2 + \ldots\ldots + (k)_{k-1} x^{k-1} + x^k,$$

$$(1+x)^l = 1 + (l)_1 x + (l)_2 x^2 + \ldots\ldots + (l)_{l-1} x^{l-1} + x^l,$$

k, l étant deux nombres entiers quelconques. On trouvera pour produit, en faisant, pour abréger, $k + l = n$,

$$(9) \qquad (1+x)^n = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

le coefficient de x^m étant, dans le second membre de la formule (9),

$$(10) \qquad A_m = (k)_m + (k)_{m-1}(l)_1 + (k)_{m-2}(l)_2 + \ldots\ldots + (k)_1 (l)_{m-1} + (l)_m.$$

D'ailleurs on aura encore

$$(11) \qquad (1+x)^n = 1 + (n)_1 x + (n)_2 x^2 + \ldots\ldots + (n)_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

le coefficient de x^m, dans le second membre de la formule (11), étant

$$(n)_m = (k+l)_m\,;$$

et puisqu'en vertu du théorème 2, les coefficients de x^m dans les seconds membres des formules (9) et (11) devront être égaux entre eux, on aura nécessairement

$$(12)\qquad (k+l)_m = (k)_m + (k)_{m-1}(l)_1 + \ldots\ldots + (k)_1(l)_{m-1} + (l)_m\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(k+l)(k+l-1)\ \ldots\ (k+l-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m} = \\[2ex] \dfrac{k(k-1)..(k-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,m} + \dfrac{k(k-1)..(k-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}\dfrac{l}{1} + \dfrac{k(k-1)..(k-m+3)}{1\,.\,2\ldots(m-3)}\dfrac{l(l-1)}{1\,.\,2} + \text{etc.} \\[2ex] \ldots + \dfrac{k(k-1)}{1\,.\,2}\dfrac{l(l-1)..(l-m+3)}{1\,.\,2\ldots(m-2)} + \dfrac{k}{1}\dfrac{l(l-1)..(l-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)} + \dfrac{l(l-1)..(l-m+1)}{1\,.\,2\ldots m}\,. \end{array}\right.$$

Enfin, cette dernière formule, devant subsister pour toutes les valeurs entières de k et de l qui surpassent le nombre m, continuera de subsister, en vertu du théorème 5, quand on y remplacera les nombres entiers k, l par des quantités quelconques x, y. On aura donc, quels que soient x et y

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x+y)(x+y-1)\ \ldots\ldots(x+y-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m} = \\[2ex] \dfrac{x(x-1)..(x-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,m} + \dfrac{x(x-1)..(x-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}\dfrac{y}{1} + \dfrac{x(x-1)..(x-m+3)}{1\,.\,2\ldots(m-3)}\dfrac{y(y-1)}{1\,.\,2} \\[2ex] \ldots + \dfrac{x(x-1)}{1\,.\,2}\dfrac{y(y-1)..(y-m+3)}{1\,.\,2\ldots(m-2)} + \dfrac{x}{1}\dfrac{y(y-1)..(y-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)} + \dfrac{y(y-1)..(y-m+1)}{1\,.\,2\ldots m}\,. \end{array}\right.$$

Si, dans la formule (14), on remplace x par $-x$ et y par $-y$, ou bien encore y par $-y$, sans remplacer en même temps x par $-x$, on obtiendra les suivantes

$$(15)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x+y)(x+y+1)\ \ldots\ldots\ (x+y+m-1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m} = \\[2ex] \dfrac{x(x+1)..(x+m-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m} + \dfrac{x(x+1)..(x+m-2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}\dfrac{y}{1} + \dfrac{x(x+1)..(x+m-3)}{1\,.\,2\ldots(m-3)}\dfrac{y(y+1)}{1\,.\,2} + \ldots \\[2ex] \ldots + \dfrac{x(x+1)}{1\,.\,2}\dfrac{y(y+1)..(y+m-3)}{1\,.\,2\ldots(m-3)} + \dfrac{x}{1}\dfrac{y(y+1)..(y+m-2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)} + \dfrac{y(y+1)..(y+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}\,. \end{array}\right.$$

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{(x-y)(x-y-1)\ \dots\ (x-y-m+1)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ m} = \\[2ex] \dfrac{x(x-1)..(x-m+1)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ m} - \dfrac{x(x-1)..(x-m+2)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ (m-1)}\,\dfrac{y}{1} + \dfrac{x(x-1)..(x-m+3)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ (m-2)}\,\dfrac{y(y+1)}{1\ .\ 2} \dots \\[2ex] \pm \dfrac{x(x-1)}{1\ .\ 2}\,\dfrac{y(y+1)..(y+m-3)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ (m-2)} \mp \dfrac{x}{1}\,\dfrac{y(y+1)..(y+m-2)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ (m-1)} \pm \dfrac{y(y+1)..(y+m-2)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ m}. \end{cases}$$

Si maintenant on pose, dans la formule (16), $x = m$, elle donnera

$$(17)\quad \begin{cases} 1 - my + \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\,\dfrac{y(y+1)}{1\ .\ 2} - \text{etc.}\ \dots\dots \\[2ex] \pm \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\,\dfrac{y(y+1)..(y+m-3)}{1\ .\ 2\ \dots\ (m-2)} \mp m\,\dfrac{y(y+1)..(y+m-2)}{1\ .\ 2\ \dots\ (m-1)} \pm \dfrac{y(y+1)..(y+m-1)}{1\ .\ 2\ \dots\ m} \\[2ex] = \dfrac{(m-y)\ (m-1-y)\dots(1-y)}{1\ .\ 2\ \dots\dots\ m}\ ; \end{cases}$$

puis on conclura de cette dernière 1.° en prenant pour y un nombre entier n qui fasse partie de la suite $1, 2, 3, \dots\dots m$,

$$(18)\quad \begin{cases} 1 - m\,(n)_1 + \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(n+1)_2 - \dots\dots \\[2ex] \dots\ \pm \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(n+m-3)_{m-2} \mp m\,(n+m-2)_{m-1} \pm (n+m-1)_m = 0\ , \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\quad \begin{cases} 1 - m\,(n)_{n-1} + \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(n+1)_{n-1} - \dots\dots \\[2ex] \dots\ \pm \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(n+m-3)_{n-1} \mp m\,(n+m-2)_{n-1} \pm (n+m-1)_{n-1} = 0\ ; \end{cases}$$

2.° en posant $y = m + 1$,

$$(20)\quad \begin{cases} 1 - m(m+1)_m + \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(m+2)_m - \dots\dots \\[2ex] \dots\dots\dots\dots \pm \dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}(2m-2)_m \mp m\,(2m-1)_m \pm (2m)_m = \pm 1\ . \end{cases}$$

§. 4. *Résolution de plusieurs équations simultanées du premier degré.*

Soient données entre n inconnues

$$x\,,\ y\,,\ z\,,\ \dots\dots\ u\,,\ v$$

n équations du premier degré et de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0x + b_0y + c_0z + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + g_0u + h_0v = k_0\,, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + g_1u + h_1v = k_1\,, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + g_2u + h_2v = k_2\,, \\ \text{etc. } \dots\dots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \dots\dots + g_{n-1}u + h_{n-1}v = k_{n-1}\,, \end{array}\right.$$

$$a_0\,,\ a_1\,,\ \dots\ a_{n-1}\,;\ b_0\,,\ b_1\,,\ \dots\ b_{n-1}\,;\ \text{etc.}\ \dots\ h_0\,,\ h_1\,,\ \dots\ h_{n-1}\,;\ \text{et}\ k_0\,,\ k_1\,,\ \dots\ k_{n-1}\,,$$

étant des quantités quelconques. Si l'on combine entre elles, par voie d'addition, les formules (1) respectivement multipliées par les facteurs

$$(2)\qquad A_{n-1}\,,\ A_{n-2}\,,\ A_{n-3}\,,\ \dots\dots\ A_1\,,\ A_0\,,$$

on en conclura

$$Px = X\,,$$

et par suite

$$(3)\qquad x = \frac{X}{P}\,,$$

pourvu qu'après avoir choisi ces facteurs de manière à vérifier les conditions

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_0b_{n-1} + A_1b_{n-2} + \dots\dots + A_{n-2}b_1 + A_{n-1}b_0 = 0\,, \\ A_0c_{n-1} + A_1c_{n-2} + \dots\dots + A_{n-2}c_1 + A_{n-1}c_0 = 0\,, \\ \text{etc. } \dots\dots \\ A_0g_{n-1} + A_1g_{n-2} + \dots + A_{n-2}g_1 + A_{n-1}g_0 = 0\,, \\ A_0h_{n-1} + A_1h_{n-2} + \dots + A_{n-2}h_1 + A_{n-1}h_0 = 0\,, \end{array}\right.$$

on pose

$$(5)\qquad A_0a_{n-1} + A_1a_{n-2} + \dots + A_{n-2}a_1 + A_{n-1}a_0 = P\,,$$

et

$$(6)\qquad A_0k_{n-1} + A_1k_{n-2} + \dots + A_{n-2}k_1 + A_{n-1}k_0 = X.$$

Considérons en particulier le cas où les équations (1) deviendraient

$$
(7)\quad \begin{cases}
x + y + z + \dots\dots\dots\dots + u + v = 1, \\
ax + by + cz + \dots\dots\dots\dots + gu + hv = k, \\
a^2x + b^2y + c^2z + \dots\dots\dots\dots + g^2u + h^2v = k^2, \\
\text{etc. } \dots\dots \\
a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z + \dots\dots + g^{n-1}u + h^{n-1}v = k^{n-1};
\end{cases}
$$

c'est-à-dire le cas où les divers coefficients de chaque inconnue seraient, ainsi que les seconds membres des équations données, les différents termes d'une progression géométrique, le premier terme de chaque progression étant l'unité. Dans ce cas particulier, les conditions (4) réduites aux suivantes

$$
(8)\quad \begin{cases}
A_0 b^{n-1} + A_1 b^{n-2} + \dots\dots\dots + A_{n-2} b + A_{n-1} = 0, \\
A_0 c^{n-1} + A_1 c^{n-2} + \dots\dots\dots + A_{n-2} c + A_{n-1} = 0, \\
\text{etc. } \dots\dots \\
A_0 g^{n-1} + A_1 g^{n-2} + \dots\dots\dots + A_{n-2} g + A_{n-1} = 0, \\
A_0 h^{n-1} + A_1 h^{n-1} + \dots\dots\dots + A_{n-2} h + A_{n-1} = 0,
\end{cases}
$$

exprimeront seulement que

$$b, \quad c, \dots\dots g, \quad h$$

sont racines de l'équation

$$(9)\qquad A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots\dots + A_{n-2} x + A_{n-1} = 0.$$

Elles seront donc satisfaites, si l'on détermine les facteurs

$$A_0,\ A_1,\ \dots\dots A_{n-2},\ A_{n-1},$$

de manière que l'on ait, quel que soit x,

$$(10)\quad A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x + A_{n-1} = A_0 (x-b)(x-c)\dots(x-g)(x-h),$$

c'est-à-dire, si, après avoir choisi arbitrairement la valeur de A_0, on prend

$$(11)\quad \begin{cases} A_1 \;= - A_0 (b + c + \dots + g + h), \\ A_2 \;= A_0 (bc + \dots + bg + bh + \dots + gh), \\ \text{etc.} \dots \\ A_{n-1} = \pm A_0\, bc \dots gh. \end{cases}$$

Alors les équations (5), (6) donneront

$$(12)\qquad P = A_0 (a - b)(a - c) \dots (a - g)(a - h),$$

$$(13)\qquad X = A_0 (k - b)(k - c) \dots (k - g)(k - h);$$

et par suite la formule (3) deviendra

$$(14)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(k-b)(k-c) \dots (k-g)(k-h)}{(a-b)(a-c) \dots (a-g)(a-h)}. \text{ On trouvera de même} \\ y = \dfrac{(k-a)(k-c) \dots (k-g)(k-h)}{(b-a)(b-c) \dots (b-g)(b-h)} \\ \text{etc.} \\ v = \dfrac{(k-a)(k-b)(k-c) \dots (k-g)}{(h-a)(h-b)(h-c) \dots (h-g)}. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, les valeurs de x, y, z propres à résoudre les trois équations

$$(15)\quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = k, \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2, \end{cases}$$

seront

$$(16)\qquad x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)},\; y = \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)},\; z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Dans les formules (14), le dénominateur de la fraction qui représente la valeur d'une inconnue est le produit de toutes les différences qu'on obtient lorsque du coefficient de cette inconnue pris dans la seconde des équations (7) on retranche successivement les coefficients de toutes les autres inconnues. Pour trouver le numérateur de la même fraction il suffit de substituer dans le dénominateur la lettre k au coefficient de l'inconnue que l'on considère.

Si l'on veut réduire au même dénominateur les fractions qui représentent les valeurs des diverses inconnues, on pourra prendre évidemment pour dénominateur commun le produit des binomes

(17) $$b-a\,;\ c-a\,,\ c-b\,;\ \ldots\ldots\ h-a\,,\ h-b\,,\ \ldots\ h-g\,;$$

c'est-à-dire le produit de toutes les différences qu'on obtient quand, après avoir disposé les lettres

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ \ldots\ldots\ g\,,\ h$$

dans un ordre quelconque, par exemple, dans l'ordre alphabétique, on retranche successivement de chaque lettre toutes celles qui la suivent. Effectivement si l'on choisit A_o de manière que la formule (12) se réduise à

(18) $$P=(b-a)(c-a)(c-b)\ \ldots\ldots\ (h-a)(h-b)\ \ldots\ (h-g)\,,$$

les équations (14) pourront s'écrire comme il suit

(19) $$x=\frac{X}{P}\,,\ y=\frac{Y}{P}\,,\ \ldots\ldots\ v=\frac{V}{P}\,,$$

les quantités X, Y, ... V étant ce que devient le produit P quand on y remplace successivement la lettre k par chacune des lettres a, b,....., h.

Le produit P, déterminé par l'équation (18), jouit d'une propriété digne de remarque, à l'aide de laquelle on peut établir directement les formules (19). C'est qu'il se change toujours en $-P$, quand on échange entre elles deux quelconques des lettres

$$a\,,\ b\,,\ c\ \ldots\ldots,\ g\,,\ h\,.$$

Alors en effet le binome qui renferme les deux lettres échangées entre elles, changera évidemment de signe; et de plus le produit des deux binomes, qui renferment ces deux lettres avec une troisième, se confondant nécessairement soit avec le produit des différences qu'on obtient quand on retranche la troisième lettre des deux premières, soit avec ce dernier produit pris en signe contraire, ne changera ni de valeur ni de signe après l'échange dont il s'agit. Ajoutons que, si l'on développe le produit P, en multipliant les uns par les autres les binomes (17), le développement ainsi obtenu se composera de divers produits partiels affectés les uns du signe $+$, les autres du signe $-$, et dans chacun desquels la somme des exposants des lettres

$$a\,,\ b\,,\ c\ \ldots\ldots,\ g\,,\ h$$

sera équivalente au nombre des binomes (17), c'est-à-dire à

(20) $$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le premier de ces produits partiels, formé par la multiplication des premiers termes des divers binomes se réduira simplement à

(21) $$a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots g^{n-2} h^{n-1}.$$

Si l'on suppose en particulier $n = 2$, on trouvera

$$P = b - a,$$

on, ce qui revient au même,

(22) $$P = a^0 b^1 - a^1 b^0.$$

Si l'on suppose au contraire $n = 3$, on aura

(23) $$P = a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0.$$

Donc alors, dans chacun des produits partiels que renfermera le développement de P, les exposants des lettres a, b ou a, b, c seront respectivement égaux aux deux ou trois premiers termes de la suite des nombres naturels

(24) $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \text{etc.} \ldots\ldots$$

et tous ces produits partiels se déduiront les uns des autres par des échanges opérés entre les exposants dont il s'agit. Or on peut affirmer qu'il en sera généralement ainsi, et que tous les produits partiels dont se composera le développement de P seront semblables au produit (21), et se déduiront de celui-ci par de simples échanges opérés entre les indices

$$0,\ 1,\ 2 \ldots\ldots,\ n-2,\ n-1.$$

Effectivement soit

(25) $$a^p b^q c^r \ldots\ldots g^s h^t$$

l'un quelconque des produits partiels, de ceux, par exemple, qui sont affectés du signe $+$, en sorte qu'on ait

(26) $$P = a^p b^q c^r \ldots\ldots g^s h^t + \text{etc.}$$

On tirera de la formule (26), en échangeant entre elles les deux lettres a et b,

$$-P = a^q b^p c^r \ldots\ldots g^s h^t + \text{etc.}$$

ou, ce qui revient au même,

(27) $$P = -a^q b^p c^r \;.....\; g^s h^t - \text{etc.} \;.....$$

Donc, le développement de P ne peut renfermer un terme affecté du signe + et de la forme

$$a^p b^q c^r \;....\; g^s h^t$$

sans renfermer en même temps un terme affecté du signe — et de la forme

$$-a^q b^p c^r \;.....\; g^s h^t,$$

c'est-à-dire, un second terme qui se déduise du premier par un échange opéré entre les exposants des deux lettres a, b, mais qui soit affecté d'un signe contraire. On arriverait encore à une conclusion toute semblable, si le premier terme était l'un de ceux qui sont affectés du signe —. Donc les différents termes, contenus dans le développement de P, étant réunis deux à deux, produiront des expressions de la forme

(28) $$\begin{cases} a^p b^q c^r \;.....\; g^s h^t - a^q b^p c^r \;.....\; g^s h^t \\ = (a^p b^q - a^q b^p) c^r \;.....\; g^s h^t, \end{cases}$$

en sorte qu'on aura

(29) $$P = (a^p b^q - a^q b^p) c^r \;.....\; g^s h^t + \text{etc.} \;.....$$

Or le binome (28) s'évanouit toutes les fois que les exposants p, q deviennent égaux. Il en résulte qu'on verra disparaître, dans le développement de P, tous les termes où deux lettres diverses a, b seraient élevées à la même puissance. Donc, si le produit (25) est un de ceux qui ne disparaissent pas, les exposants

$$p, q, r, \;.....\; s, t$$

des différentes lettres y seront tous distincts les uns des autres; et, comme l'exposant de chaque lettre ne pourra surpasser le nombre de celles des différences

$$b - a,\; c - a,\; c - b,\; .....\; h - a,\; h - b,\; ...\; h - g$$

qui la renferment, c'est-à-dire le nombre $n - 1$, les exposants

$$p, q, r, \;.....\; s, t$$

ne pourront être évidemment que les nombres

$$0, 1, 2 \;.....,\; n - 1.$$

Donc en définitive dans le développement de la fonction

$$(30) \qquad P = a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots g^{n-2} h^{n-1} - \text{etc.} \ldots\ldots$$

tous les termes se déduiront du premier par des échanges opérés entre les exposants des différentes lettres, et deux termes, dont l'un se déduira de l'autre par un seul échange opéré entre deux exposants, seront toujours affectés de signes contraires.

Si l'on élève les quantités

$$a\,,\ b\,,\ c\ \ldots\ldots,\ g\,,\ h$$

à des puissances dont les degrés soient respectivement egaux aux nombres

$$0\,,\ 1\,,\ 2\ \ldots\ldots,\ n-2\,,\ n-1$$

rangés dans un ordre quelconque, le produit de ces puissances sera toujours l'un des termes affectés du signe $+$ ou du signe $-$ dans le second membre de la formule (30). En effet, pour déduire ce produit du premier terme

$$a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots g^{n-2} h^{n-1},$$

il suffira d'opérer des échanges successifs 1.° entre l'exposant 0 et celui que portera la lettre a dans le nouveau produit; 2.° entre l'exposant 1 et celui que portera la lettre b dans le nouveau produit; etc. ..... Cela posé, représentons par la notation

$$(31) \qquad \mathrm{S}(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots g^{n-2} h^{n-1})$$

la somme qu'on obtient quand au produit

$$a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1},$$

pris avec le signe $+$, on ajoute tous ceux qu'on peut en déduire à l'aide d'échanges opérés entre les exposants

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ n-2\,,\ n-1\,;$$

chacun des nouveaux produits étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'on le déduit du premier à l'aide d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'échanges successifs. On aura

$$(32) \qquad P = \mathrm{S}(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots g^{n-2} h^{n-1})\,;$$

et les formules (21), qui fournissent les valeurs de $x, y, z, \ldots u, v$ propres à vérifier les équations (1), pourront s'écrire comme il suit

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{S(\pm k^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1})}{S(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1})}, \\ y &= \frac{S(\pm a^0 k^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1})}{S(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1})}, \\ &\text{etc.} \\ v &= \frac{S(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} k^{n-1})}{S(\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{n-2} h^{n-1})}; \end{aligned} \right.$$

Concevons maintenant que, dans le développement de P, on remplace les exposants des différentes lettres $a, b, c \ldots, g, h$ par des indices. Alors, au lieu de l'équation (29), on obtiendra la suivante

$$(34)\qquad P = (a_p b_q - a_q b_p) c_r \ldots g_s h_t + \text{etc.} \ldots$$

Or cette dernière valeur de P pourra être présentée sous la forme

$$(35)\qquad P = A_0 a_{n-1} + A_1 a_{n-2} + \ldots + A_{n-2} a_1 + A_{n-1} a_0,$$

$A_0, A_1 \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ étant des sommes de produits formés avec les coefficients

$$b_0, b_1 \ldots, b_{n-1};\ c_0, c_1 \ldots, c_{n-1};\ \ldots\ g_0, g_1 \ldots, g_{n-1};\ h_0, h_1 \ldots h_{n-1};$$

et, comme elle s'évanouira, en vertu de l'équation (34), si l'on suppose

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 \ldots, a_{n-1} = b_{n-1},$$

on peut affirmer que les quantités

$$A_0, A_1 \ldots A_{n-2}, A_{n-1},$$

renfermées dans l'équation (35), vérifieront la première des conditions (8). On prouverait de même que les quantités dont il s'agit vérifieront la seconde, la troisième, etc. ..... enfin la dernière des conditions (8). Donc ces quantités pourront servir à l'élimination des inconnues $y, z \ldots u, v$ entre les équations (1), et la valeur de x sera donnée par la formule (3), pourvu qu'on détermine X par la formule (6), ou, ce qui revient au même, pourvu qu'on appelle X ce que devient l'expression (5) quand on y remplace la lettre a par la lettre k. Donc, en définitive, les valeurs des inconnues

$$x, y, \ldots u, v$$

propres à vérifier les équations (1) seront des fractions, dont on obtiendra le commun dénominateur P en remplaçant les exposants des lettres $a, b, c, \ldots, g, h$ par des indices dans le développement du produit qui compose le second nombre de l'équation (18). Quant au numérateur de chaque fraction, on le déduira immédiatement du dénominateur, en remplaçant les quantités, qui dans les équations (1) servent de coefficients à l'inconnue que l'on considère, par les seconds membres de ces mêmes équations.

Si, pour plus de commodité, on représente par la notation

(36) $$S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})$$

la somme qu'on obtient quand au produit

$$a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}$$

pris avec le signe + on ajoute tous ceux qu'on peut en déduire à l'aide d'échanges opérés entre les indices

$$0, 1, 2, 3 \ldots, n-2, n-1,$$

chacun des nouveaux produits étant pris avec le signe + ou le signe —, suivant qu'on le déduit du premier à l'aide d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'échanges successifs ; on aura

(37) $$P = S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}),$$

et les valeurs de $x, y, z \ldots, u, v$, propres à vérifier les équations (1), se présenteront sous la forme

(38) $$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{S(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}, \\ y &= \frac{S(\pm a_0 k_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}, \\ &\text{etc.} \\ v &= \frac{S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{S(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}. \end{aligned} \right.$$

Si, pour fixer les idées, on réduit les équations (1) à

(39) $$\left\{ \begin{aligned} a_0 x + b_0 y + c_0 z &= k_0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= k_2, \end{aligned} \right.$$

on trouvera

$$(40)\qquad x = \frac{S(\pm k_0 b_1 c_2)}{S(\pm a_0 b_1 c_2)} = \frac{k_0 b_1 c_2 - k_0 b_2 c_1 + k_1 b_2 c_0 - k_1 b_0 c_2 + k_2 b_0 c_1 - k_2 b_1 c_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0}.$$

On arriverait au même résultat, en présentant la première des équations (16) sous la forme

$$(41)\qquad x = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

puis développant les deux produits

$$(b-k)(c-k)(c-b), \quad (b-a)(c-a)(c-b),$$

et remplaçant dans les développements les exposants des lettres par des indices. Sous ces conditions, la formule (41) peut être censée fournir la valeur de la première des inconnues que renferment les équations (39). Cette valeur, qui prise à la lettre serait inexacte, et ne peut devenir exacte que par suite des modifications énoncées, est ce qu'on nomme une *valeur symbolique* de l'inconnue dont il s'agit. L'équation (41), considérée sous ce point de vue, est elle-même une *équation symbolique.*

Concevons à présent que $m+1$ inconnues, représentées par

$$x_0,\ x_1 \ldots\ldots x_m,$$

soient déterminées par $m+1$ équations du premier degré et de la forme

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= k_0, \\ x_0 + x_1 &= k_1, \\ x_0 + 2x_1 + x_2 &= k_2, \\ &\text{etc. } \ldots\ldots \\ x_0 + mx_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x_2 + \ldots\ldots + x_m &= k_m. \end{aligned}\right.$$

On tirera successivement de ces équations

$$x_0 = k_0,\ x_1 = k_1 - k_0,\ x_2 = k_2 - 2k_1 + k_0, \text{ etc. } \ldots\ldots$$

et généralement, si l'on désigne n un quelconque des nombres entiers renfermés entre les limites 0, m, on obtiendra pour valeur de x_n une fonction linéaire des quantités

$$k_0,\ k_1,\ k_2 \ldots\ldots,\ k_n.$$

Soit en conséquence

$$(43)\qquad x_n = A_0 k_n + A_1 k_{n-1} + A_2 k_{n-2} + \ldots + A_{n-1} k_1 + A_n k_0.$$

Dans le cas particulier où les quantités

(44) $$k_0,\ k_1,\ k_2\ \ldots\ldots,\ k_m$$

se réduiront aux différents termes d'une progression géométrique de la forme

(45) $$k^0 = 1,\ k,\ k^2,\ \ldots\ldots,\ k^m,$$

on aura simplement

(46) $$x_n = A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + A_2 k^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} k + A_n .$$

D'autre part, il est clair, que, dans ce cas, on vérifiera les équations (42), en posant

$$x + 1 = k,\quad x = k - 1,$$

et

$$x_n = x^n = (k-1)^n,$$

ou, ce qui revient au même,

(47) $$x_n = k^n - n k^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} k^{n-2} - \ldots\ldots \mp nk \pm 1 .$$

Les formules (46), (47) devant s'accorder entre elles, il en résulte qu'on aura, quel que soit k,

(48) $$A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + A_2 k^{n-2} + \ldots + A_{n-1} k + A_n = k^n - nk^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} k^{n-2} - \ldots \mp nk \pm 1,$$

et par suite

(49) $$A_0 = 1,\ A_1 = -n,\ A_2 = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},\ \ldots\ldots\ A_{n-1} = \mp n,\ A_n = \pm 1 .$$

Donc la valeur générale de x_n, déterminée par la formule (46), sera

(50) $$x_n = k_n - nk_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} k_{n-2} - \ldots\ldots \mp nk_1 \pm k_0 .$$

Au reste, on peut arriver directement à l'équation (50), en combinant entre elles par voie d'addition les n premières des formules (42) respectivement multipliées par les coefficients

$$1,\ -n,\ \frac{n(n-1)}{2},\ \ldots\ldots \mp n,\ \pm 1,$$

puis ayant égard aux formules (19) et (20) du § 3, ou plutôt à celles qu'on en déduit quand on échange entre elles les lettres m et n. Donc en définitive les valeurs de

$$x_0,\ x_1\ \ldots\ldots,\ x_m$$

propres à vérifier les équations (42) seront

$$(51)\quad \begin{cases} x_0 = k_0, \\ x_1 = k_1 - k_0, \\ x_2 = k_2 - 2k_1 + k_0, \\ \text{etc. .....} \\ x_m = k_m - mk_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} k_{m-2} - \ldots\ldots \mp mk_1 \pm k_0. \end{cases}$$

Si, dans les formules (42) et (51), on remplace simultanément les quantités

$$x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots, x_m;\ k_0, k_1, k_2 \ldots\ldots, k_m$$

par les rapports

$$x_0, \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a^2} \ldots\ldots \frac{x_m}{a^m};\ k_0, \frac{k_1}{a}, \frac{k_2}{a^2} \ldots\ldots, \frac{k_m}{a^m},$$

on en conclura que les valeurs des inconnues

$$x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots, x_m$$

propres à vérifier les équations

$$(52)\quad \begin{cases} x_0 = k_0, \\ x_1 + ax_0 = k_1, \\ x_2 + 2ax_1 + a^2x_0 = k_2, \\ \text{etc. .....} \\ x_m + max_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x_{m-2} + \ldots \mp ma^{m-1} x_1 \pm a^m x_0 = k_m \end{cases}$$

sont respectivement

$$(53)\quad \begin{cases} x_0 = k_0, \\ x_1 = k_1 - ak_0, \\ x_2 = k_2 - 2ak_1 + a^2 k_0, \\ \text{etc. .....} \\ x_m = k_m - mak_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 k_{m-2} - \ldots\ldots \mp ma^{m-1} k_1 \pm a^m k_0. \end{cases}$$

Si l'on suppose en particulier $a = -1$, les formules (52) deviendront

$$(54)\quad \begin{cases} x_0 = k_0, \\ x_1 - x_0 = k_1, \\ x_2 - 2x_1 + x_0 = k_2, \\ \text{etc. .....} \\ x_m - mx_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x_{m-2} \ldots\ldots \mp m x_m \pm x_0 = k_m, \end{cases}$$

et l'on en tirera

$$(55)\quad \begin{cases} x_0 = k_0, \\ x_1 = k_1 + k_0, \\ x_2 = k_2 + 2k_1 + k_0, \\ \text{etc. .....} \\ x_m = k_m + mk_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} k_{m-2} + \ldots\ldots + mk_1 + k_0. \end{cases}$$

---

§ 5. *Formules d'interpolation.*

L'*interpolation* consiste à déterminer la valeur exacte ou approchée d'une fonction d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues.

Considérons spécialement une fonction entière u de la variable x. D'après ce qui a été dit dans le § 3, cette fonction sera complétement déterminée, si elle est du degré m, et si l'on en connait $m+1$ valeurs particulières. Soient

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots,\ u_{m-1},\ u_m$$

ces $m+1$ valeurs particulières correspondantes aux valeurs

$$x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots\ldots,\ x_{m-1},\ x_m$$

de la variable x. Si l'on suppose d'abord que les valeurs particulières de u se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la première u_0, la fonction u, devant alors s'évanouir pour $x = x_1$, pour $x = x_2$ ....., enfin pour $x = x_m$, sera divisible par le produit

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m),$$

et sera par conséquent de la forme

$$u = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m),$$

a ne pouvant être qu'une quantité constante. De plus, u devant se réduire à u_0 pour $x = x_0$, on en conclura

$$u_0 = a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_m),$$

et par suite

(1) $$u = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_m)}.$$

De même, si les valeurs particulières de u se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la seconde u_1, on trouvera

$$u = u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_1 - x_m)};$$

etc. ..... Enfin, si elles se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la dernière u_m, on trouvera

$$u = u_m \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \ldots\ldots (x_m - x_{m-1})}.$$

En réunissant les diverses valeurs de u correspondantes aux diverses hypothèses qu'on vient de faire, on obtiendra pour somme un polynome en x du degré m, qui aura évidemment la propriété de se réduire à u_0 pour $x = x_0$, à u_1 pour $x = x_1$ ....., à u_m pour $x = x_m$. Ce polynome sera donc la valeur générale de u qui résout la question proposée, en sorte que cette valeur générale se trouvera déterminée par la formule

(2) $$u = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)..(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)..(x_0 - x_m)} + \ldots + u_m \frac{(x - x_0)(x - x_1)..(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)..(x_m - x_{m-1})},$$

qui est la formule d'interpolation de Lagrange.

En vertu de la formule (1), si la fonction u du degré m doit s'évanouir pour les valeurs particulières

$$0,\ 1,\ 2 \ldots\ldots,\ m - 1$$

de la variable x, et se réduire à l'unité pour $x = m$, on aura

(3) $$u = \frac{x(x-1) \ldots\ldots (x - m + 1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m}.$$

Lorsque les valeurs particulières de x représentées par

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m$$

se réduisent aux différents termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m,$$

alors, pour obtenir la valeur générale de u, il suffit évidemment de supposer

$$(4)\qquad u = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{1\,.\,2} + \ldots + a_m \frac{x(x-1)\ \ldots\ (x-m+1)}{1\,.\,2\ \ldots\ m},$$

et de choisir les coefficients

$$a_0,\ a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_m$$

de manière à vérifier les équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} a_0 &= u_0, \\ a_0 + a_1 &= u_1, \\ a_0 + 2a_1 + a_2 &= u_2, \\ &\text{etc. } \ldots \\ a_0 + m a_1 + \frac{m(m-1)}{2} a_2 + \ldots + a_m &= u_m. \end{aligned}\right.$$

Or, on vérifiera ces dernières [voyez le § 4] en prenant

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a_0 &= u_0, \\ a_1 &= u_1 - u_0, \\ a_2 &= u_2 - 2u_1 + u_0, \\ &\text{etc. } \ldots \\ a_m &= u_m - m u_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} m_{m-2}\ \ldots\ \mp m u_1 \pm u_0. \end{aligned}\right.$$

Donc la valeur générale de u sera

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & u = u_0 + (u_1 - u_0)\,x + (u_2 - 2u_1 + u_0)\frac{x(x-1)}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots + \left(u_m - m u_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} u_{m-2} \ldots \mp m n_1 \pm u_0\right) \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1\,.\,2\ \ldots\ m}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose en particulier

$$u = x^m,$$

on aura

(8) $$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2^m,\ \ldots\ u_{m-1} = (m-1)^m,\ u_m = m^m,$$

et les formules (6), (7) donneront

(9) $$\left\{\begin{aligned} &a_0 = 0, \\ &a_1 = 1, \\ &a_2 = 2^m - 2, \\ &a_3 = 3^m - 3.2^m + 3, \\ &\text{etc.} \\ &a_{m-1} = (m-1)^m - (m-1)(m-2)^m + \ldots \pm (m-1), \\ &a^m = m^m - m(m-1)^m + m\frac{(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots \mp m, \end{aligned}\right.$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} &x^m = x + (2^m-2)\frac{x(x-1)}{1.2} + (3^m - 3.2^m + 3)\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \text{etc.} \\ &\ldots + \left(m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots \mp m\right)\frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1.2\ldots m}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, comme, dans le cas dont il s'agit, on aura quelque soit x

(11) $$x^m = a_0 + a_1 x + a_2\frac{x(x-1)}{1.2} + \ldots + a_{m-1}\frac{x(x-1)\ldots(x-m+2)}{1.2\ldots(m-1)} + a_m\frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1.2\ldots m},$$

on en conclura

$$\frac{a_m}{1.2\ldots m} = 1,$$

$$\frac{a_{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} - [1 + 2 + \ldots + (m-1)]\frac{a_m}{1.2\ldots m} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

(12) $$\left\{\begin{aligned} &a_m = 1.2.3\ldots m, \\ &a_{m-1} = 1.2\ldots(m-1)[1 + 2 + \ldots + (m-1)] = 1.2\ldots(m-1)\frac{(m-1)m}{2}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

On aura donc encore

$$(13)\left\{\begin{array}{l} m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots\ldots \pm m = 1.2.3 \ldots\ldots m, \\ (m-1)^m - (m-1)(m-2)^m + \ldots\ldots \mp (m-1) = 1.2.3 \ldots (m-1)\frac{m(m-1)}{2}, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et la formule (10) pourra être réduite à

$$(14)\left\{\begin{array}{l} x^m = x(x-1)\ldots(x-m+1) + \frac{m(m-1)}{1.2}x(x-1)\ldots(x-m+2) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{3^{m-1}-2^m+1}{1.2}x(x-1)(x-2) + \frac{2^{m-1}-1}{1}x(x-1) + x. \end{array}\right.$$

Si, dans cette dernière, on change x en $-x$, elle donnera

$$(15)\left\{\begin{array}{l} x^m = x(x+1)\ldots(x+m-1) - \frac{m(m-1)}{1.2}x(x+1)\ldots(x+m-2) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{3^{m-1}-2^m+1}{1.2}x(x+1)(x+2) \mp \frac{2^{m-1}-1}{1}x(x+1) \pm x. \end{array}\right.$$

Lorsque m est de la forme

$$p-1,$$

p désignant un nombre premier impair, la première des équations (13) se réduit à

$$(16)\qquad 1.2.3\ldots m = m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots\ldots - m;$$

et, comme alors, en vertu du théorème de Fermat sur les nombres premiers, les puissances

$$m^m,\ (m-1)^m,\ (m-2)^m,\ \text{etc.}\ \ldots\ldots$$

divisées par p donneront l'unité pour reste, il est clair que le second membre de l'équation (16), divisé par p, fournira le même reste que la somme

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \text{etc.}\ \ldots\ldots - m = (1-1)^m - 1 = -1.$$

Donc, *lorsque* $p = m + 1$ *est un nombre premier impair, le produit*

$$(17) \qquad 1 . 2 . 3 \ldots\ldots m,$$

divisé par p, *donne pour reste* -1, *ou en d'autres termes ce produit, augmenté de l'unité, devient divisible par* p. C'est en cela que consiste le théorème de Wilson, qui s'étend au cas même où l'on pose $p = 2 = 1 + 1$. D'ailleurs il est clair que ce théorème subsiste uniquement pour les nombres premiers. Car, si le nombre $m + 1$ admet d'autres diviseurs que lui-même et l'unité, chacun de ces diviseurs, se confondant nécessairement avec l'un des nombres $2, 3 \ldots, m$, divisera le produit

$$1 . 2 . 3 \ldots m$$

d'où l'on doit conclure qu'il ne saurait diviser la somme

$$1 + 1 . 2 . 3 \ldots m.$$

Si les valeurs particulières de x représentées par $x_1, x_2, \ldots x_m$ se réduisaient aux différents termes de la progression géométrique

$$1, r, r^2, \ldots\ldots r^m,$$

alors, en posant

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_m x^m,$$

on aurait, pour déterminer les facteurs inconnus $a_0, a_1, \ldots a_m$, des équations linéaires dont les premiers membres seraient semblables aux premiers membres des formules (7) du § 4, et par suite on obtiendrait les valeurs de a_0, a_1, etc. ... a_m, en ajoutant les équations dont il s'agit, après les avoir respectivement multipliées par les coefficients des diverses puissances de x dans les développements des produits

$$(x - r)(x - r^2)\ldots(x - r^m),\ (x - 1)(x - r^2)\ldots(x - r^m), \text{ etc.}, (x - 1)(x - r)\ldots(x - r^{m-1}).$$

On trouverait ainsi

$$(18) \qquad u =$$

$$\frac{u_m - (r + r^2 + \ldots + r^m) u_{m-1} + \ldots \pm r r^2 \ldots r^m u_0}{(1 - r)(1 - r^2)\ldots(1 - r^m)} + \ldots + \frac{u_m - (1 + r \ldots + r^{m-1}) u_{m-1} + \ldots \pm 1 . r \ldots r^{m-1} u_0}{(r^m - 1)(r^m - r)\ldots(r^m - r^{m-1})} x^m.$$

Observons enfin que des formules (7) et (18) on déduira facilement celles qui seraient relatives au cas où les valeurs particulières de x coïncideraient avec les différents termes d'une progression quelconque soit arithmétique, soit géométrique.

§ 6. *Des séries convergentes et divergentes, et en particulier de celles qui représentent les développements des puissances entières et négatives d'un binome.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

(1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots,$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi connue. Ces quantités elles-mêmes sont les différents *termes* de la série que l'on considère. Soit

(2) $$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une limite finie s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandisque x croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n pour que la série soit complétement déterminée. Si, dans le cas où la série est convergente, on pose

(3) $$s = s_n + r_n,$$

r_n sera ce qu'on appelle le reste de la série prolongée jusqu'au n^{me} terme.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

(4) $$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \text{etc.} \ldots\ldots$$

qui a pour terme général x^n. En la substituant à la série (1), on aura

$$s_n = 1 + x + \ldots\ldots + x^{n-2} + x^{n-1},$$

$$s_n x = x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1} + x^n,$$

et par suite

$$s_n(x-1) = x^n - 1,$$

(5) $$s_n = 1 + x \ldots\ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

On peut mettre cette valeur de s_n sous la forme

(6) $$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} ;$$

et, comme, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction

$$\frac{x^n}{1-x}$$

converge vers la limite zéro ou croît au-delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que dans la première hypothèse la progression (4) est une série convergente qui a pour somme

(7) $$s = \frac{1}{1-x} ,$$

tandisque, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme. Si, dans la première hypothèse, on prend s_n pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera mesurée par la valeur numérique du reste

(8) $$r_n = \frac{x^n}{1-x} .$$

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie de points ou d'un etc. Ainsi, lorsque la série (1) sera convergente, on aura

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} \ldots\ldots ;$$

et, l'équation (7) donnera, si la valeur numérique de x ne surpasse pas l'unité,

(9) $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} .$$

Il résulte de cette dernière formule que la progression géométrique

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots\ldots$$

a pour somme la première des puissances négatives entières du binome $1 - x$.

En vertu des définitions ci-dessus adoptées, pour que la série (1) soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme s_n vers une limite fixe : en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes de n, les sommes

$$s_n, \; s_{n+1}, \; s_{n+2} \; \ldots\ldots$$

diffèrent de la limite s et par conséquent entre elles de quantités infiniment petites. D'ailleurs les différences respectives entre la première somme s_n et les suivantes sont respectivement

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$

$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$

$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$

etc. .....

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandisque n augmente. Mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$

etc. .....

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \; u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; \ldots\ldots$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Il résulte encore de ces principes que, si une série convergente est uniquement formée de termes positifs, la convergence continuera de subsister, lorsqu'on changera les signes de tous ces termes ou de quelques uns d'entre eux. Car, en opérant ainsi, on ne pourra que diminuer la valeur numérique de la somme des termes qui suivront un terme quelconque.

Pour plus de commodité, nous désignons dorenavant par

(10) $$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \text{etc.}\ \ldots\ldots$$

les valeurs numériques des différents termes de la série (1), de sorte qu'on aura

$$u_n = U_n, \quad \text{ou} \quad u_n = -U_n$$

suivant que u_n sera positif ou négatif. Cela posé, il est clair que, si la série (10) est convergente, la série (1) sera convergente à plus forte raison. De plus il sera facile d'établir la proposition suivante.

1.er Théorême. *Soit Ω la limite ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, tandisque n croit indéfiniment, la racine n^{me} de la valeur numérique de u_n, c'est-à-dire l'expression*

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{U_n}.$$

La série (1) *sera convergente, si l'on a $\Omega < 1$, et divergente si l'on a $\Omega > 1$.*

Démonstration. En effet, soit U un nombre renfermé entre les limites 1 et Ω. On aura, dans la premiere hypothèse,

$$\Omega < U < 1.$$

Alors, si n vient à croître au-de-là de toute limite, les plus grandes valeurs de

$$U_n^{\frac{1}{n}} = (\pm u_n)^{\frac{1}{n}},$$

en s'approchant indéfiniment de Ω, finiront par devenir inférieures à U, et en même temps les plus grandes valeurs numériques de u_n deviendront inférieures à U^n. Donc, dans la première hypothèse, les termes de la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots\ldots$$

finiront par devenir (abstraction faite des signes) inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$1,\ U,\ U^2,\ \ldots\ldots\ U^n,\ U^{n+1},\ \ldots\ldots;$$

et comme cette progression sera convergente, U étant < 1, la série (1) sera elle-même convergente. Au contraire, dans la seconde hypothèse, on aura

$$\Omega > U > 1.$$

Alors, si n vient à croître au-delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(\pm u_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de Ω, finiront par devenir supérieures à U, et les plus grandes valeurs numériques de u_n supérieures à U^n. Donc alors on trouvera dans la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ \ u_{n+1},\ \text{etc.}$$

un nombre indéfini de termes supérieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$1,\ U,\ U^2,\ \ldots\ U^n,\ U^{n+1},\ \text{etc.}$$

par conséquent un nombre indéfini de termes supérieurs à l'unité, U étant > 1; et la série (1) sera nécessairement divergente.

Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport

(11) $$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

c'est-à-dire la fraction

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

converge vers une limite fixe Ω, alors, en désignant par ε un nombre aussi petit que l'on voudra, on pourra donner au nombre m entier une valeur assez considérable pour que, n étant égal ou supérieur à m, chacun des rapports

$$\frac{U_{m+1}}{U_m},\ \frac{U_{m+2}}{U_{m+1}},\ \ldots\ \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

et par suite la moyenne géométrique entre ces rapports * ou le quotient

(12) $$\frac{U_n^{\frac{1}{n}}}{U_m^{\frac{1}{n}}}$$

* Lorsque n quantités positives a, a', a'', ... sont toutes supérieures à un nombre donné g, et toutes inférieures à un autre nombre donné h, le produit $aa'a''$ ..... est évidemment compris entre les limites g^n, h^n; et par suite la racine n^{me} de ce produit ou la moyenne géométrique entre les quantités a, a', a'', ... se trouve elle-même comprise entre les deux nombres g, h.

restent compris entre les quantités

$$\Omega - \varepsilon, \quad \Omega + \varepsilon.$$

Si maintenant on fait croitre indéfiniment le nombre n sans changer la valeur de m, l'expression

$$U_m^{\frac{1}{n}}$$

convergera vers la limite

$$U_m^0 = 1,$$

et l'expression (12) vers la même limite que la suivante

$$U_n^{\frac{1}{n}}$$

Donc la limite de cette dernière, devant rester comprise entre les quantités $\Omega - \varepsilon$, $\Omega + \varepsilon$, quelque petit que l'on suppose le nombre ε, coïncidera nécessairement avec la limite Ω de la valeur numérique du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

2.e Théorème. *Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite fixe Ω, la série (1) sera convergente ou divergente suivant que cette limite sera inférieure ou supérieure à l'unité.*

Lorsque, la série (1) étant convergente et composée de termes alternativement positifs et négatifs, la valeur numérique U_n du terme général décroit sans cesse pour des valeurs croissantes de n, alors, la valeur du reste r_n pouvant être présentée sous la forme

$$r_n = (-1)^n \left[(U_n - U_{n+1}) + (U_{n+2} - U_{n+3}) + \ldots\ldots \right]$$

ou sous la suivante

$$r_n = (-1)^{n-1} \left[(U_n - U_{n+1}) + (U_{n+2} - U_{n+3}) + \ldots\ldots \right],$$

selon que le premier terme u_0 est positif ou négatif, le reste r_n change de signe quand on fait croitre n d'une unité. Par suite la somme s de la série est comprise entre

$$s_n \quad \text{et} \quad s_{n+1}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

3.ᵉ Théorême. *Lorsqu'une série convergente étant composée de termes alternativement positifs et négatifs, la valeur numérique de chaque terme est inférieure à celle du terme précédent, la somme de la série est comprise entre le premier terme et la somme des deux premiers, entre cette dernière somme et celle des trois premiers, etc. .....*

Si l'on multiplie par une constante a les différents termes de la série (1), on obtiendra la suivante

(13) $$a u_0, \ a u_1, \ a u_2, \ \ldots\ldots$$

dans laquelle la somme des n premiers termes, savoir,

$$a\,(u_0 + u_n + \ldots\ldots + u_{n-1}) = a s_n,$$

convergera vers une limite fixe as si la somme des n premiers termes de la série (1) converge vers une limite fixe s, et ne convergera vers aucune limite dans le cas contraire. Cette remarque suffit pour établir le théorême suivant.

4.ᵉ Théorême. *Si l'on multiplie les différents termes de la série (1) par une constante a, la nouvelle série ainsi obtenue sera convergente ou divergente suivant que la série (1) sera elle-même convergente ou divergente, et l'on aura dans le premier cas*

(14) $$a u_0 + a u_1 + a u_2 + \text{etc.} \ \ldots\ldots = a\,(u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.} \ \ldots\ldots).$$

Corollaire. Si, dans l'équation (14) on change a en $\frac{1}{a}$, on trouvera

(15) $$\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}}{a} = \frac{u_0}{a} + \frac{u_1}{a} + \frac{u_2}{a} + \text{etc.} \ \ldots\ldots$$

Si, les séries

$$u_0, \ n_1, \ u_2, \ \text{etc.}$$
$$v_0, \ v_1, \ v_2, \ \text{etc.}$$
$$w_0, \ w_1, \ w_2, \ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \ \ldots\ldots$$

étant convergentes et ayant pour sommes respectives s, s', s'', ... on fait

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1},$$
$$s''_n = w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{n-1},$$
$$\text{etc.} \ \ldots\ldots,$$

alors, pour des valeurs croissantes de n, s_n convergera vers la limite s, s'_n vers la limite s'', ... et par suite les sommes

$$s_n + s'_n, \quad s_n + s'_n + s''_n, \text{ etc.}$$

des n premiers termes des séries qui auront pour termes généraux

$$u_n + v_n, \quad u_n + v_n + w_n, \text{ etc.}$$

convergeront vers les limites

$$s + s', \quad s + s + s'', \text{ etc. .....}$$

On peut donc encore énoncer ce théorème :

5.° Théorême. *Lorsque plusieurs séries sont convergentes, l'addition de leurs termes généraux fournit le terme général d'une nouvelle série qui est elle-même convergente, et dont la somme résulte de l'addition des sommes des séries proposées.*

On a, en vertu de ce théorême,

(16) $$\left\{\begin{array}{l} (u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}) + (v_0 + v_1 + v_2) + \text{etc.} \\ = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \text{etc. .....}, \end{array}\right.$$

(17) $$\left\{\begin{array}{l} (u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.}) + (v_0 + v_1 + v_2 + \text{etc.}) + (w_0 + w_1 + w_2 + \text{etc.}) \\ = (u_0 + v_0 + w_0) + (u_1 + v_1 + w_1) + (u_2 + v_2 + w_2) + \text{etc. ....} \end{array}\right.$$

6.° Théorême. *Si, les deux séries*

(18) $$\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1, u_2, \text{ etc. .....} \\ v_0, v_1, v_2, \text{ etc. .....} \end{array}\right.$$

étant convergentes et ayant pour sommes respectives s, s', chacune de ces deux séries reste convergente lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques, alors la série

(19) $$u_0 v_0, \quad u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \text{ etc. .....},$$

dont le terme général est

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

sera elle-même convergente et aura pour somme le produit ss', *en sorte qu'on trouvera*

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} (u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.} \ldots\ldots) (v_1 + v_1 + v_2 + \text{etc.} \ldots\ldots) = \\ u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \text{etc.} \ldots \end{array} \right.$$

Démonstration. Soient s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des séries (18), et s''_n la somme des n premiers termes de la série (19). Représentons par m le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n-1}{2}$, et supposons d'abord que les différents termes des séries (18) soient tous positifs. On aura évidemment dans cette hypothèse

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots\ldots + (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots\ldots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0)$$

$$< (u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}) (v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1})$$

$$> (u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_m) (v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_m),$$

ou

$$s''_n < s_n s'_n$$

$$> s_{m+1} s'_{m+1}.$$

Concevons maintenant que l'on fasse croître n au-delà de toute limite. Le nombre m qui ne peut être que $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$ croîtra lui-même indéfiniment, et les deux sommes s_n, s_{m+1} convergeront vers la limite s, tandisque s'_n et s'_{m+1} convergeront vers la limite s'. Par suite les deux produits $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$ et la somme s''_n, comprise entre ces deux produits, convergeront vers la limite ss' ; ce qui suffit pour établir le théorême énoncé. Il en résulte aussi que l'expression

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} s_n s'_n - s''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \ldots\ldots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}) \end{array} \right.$$

convergera, dans l'hypothèse dont il s'agit, vers la limite zéro.

Supposons à présent que, les différents termes des séries (18) conservant les mêmes valeurs numériques, tous ces termes, ou quelques uns d'entre eux viennent à changer de signe ; ce changement ne pourra que diminuer la valeur numérique du second membre de la formule (21). Donc cette valeur numérique, ou celle de la différence

$$s_n s'_n - s''_n$$

convergera encore, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro, et s''_n vers la limite ss' du produit $s_n s'_n$. Donc alors la série (19) sera encore convergente et aura pour somme le produit ss'.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une certaine variable x, cette série est convergente et ses différents termes fonctions continues de x dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable; la somme s_n des n premiers termes, le reste r_n et la somme s de la série sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Celà posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite, et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

7.e Théorème. *Lorsque les différents termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une variable x, continues par rapport a cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente; la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

Considérons à présent une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, c'est-à-dire, une série de la forme

$$(22) \qquad a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ \text{etc. .....};$$

et soit ω la limite ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, pour des valeurs croissantes de n, la racine n^{me} de la valeur numérique de a_n ou l'expression $(\pm a_n)^{\frac{1}{n}}$. Comme la limite ou la plus grande des limites de

$$(\pm a_n x^n)^{\frac{1}{n}}$$

sera

$$\pm \omega x;$$

il est clair que la série (22) sera convergente quand la valeur numérique du produit ωx sera inférieure à l'unité, c'est-à-dire, quand la valeur numérique de x sera inférieure à $\frac{1}{\omega}$, et divergente quand la valeur numérique de x deviendra supérieure à $\frac{1}{\omega}$. Ajoutons que ω sera précisement la limite de la valeur numérique du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, si pour des valeurs croissantes de n cette valeur uumérique converge effectivement vers une limite fixe. On peut donc énoncer ce théorême:

8.e **Théorème.** *Si ω désigne la limite ou la plus grande des limites de l'expression $(\pm a_n)^{\frac{1}{n}}$, ou bien encore une limite fixe vers laquelle converge, tandisque n croit indéfiniment, la valeur numérique du rapport*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

la série (22) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites

(23)
$$-\frac{1}{\omega}, +\frac{1}{\omega},$$

et divergente pour toutes les valeurs de x situées hors de ces limites.

Si la série (22) est convergente pour des valeurs numériques de x inférieures à un nombre donné c, ce nombre sera nécessairement inférieur ou tout au plus égal à $\frac{1}{\omega}$; et la série (22) continuera d'être convergente quand on remplacera chaque terme par sa valeur numérique. Celà posé, on déduit immédiatement du théorème 6 la proposition suivante :

9.e **Théorème.** *Si deux séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de x, savoir*

(24)
$$\left\{\begin{array}{l} a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ \ldots\ldots\ldots \\ b_0,\ b_1 x,\ b_2 x,\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

sont convergentes pour des valeurs numériques de x inférieures à un nombre donné c, la série

(25)
$$a_0 b_0,\ (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x,\ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2,\ \text{etc.}\ \ldots..$$

sera elle-même convergente entre les limites

$$x = -c,\quad x = +c,$$

et l'on aura, pour des valeurs de x renfermées entre ces limites,

(26)
$$\left\{\begin{array}{l} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots)\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \text{etc.}\ \ldots.. \end{array}\right.$$

Corollaire 1.er Si deux ou plusieurs fonctions de x représentées par y, z, ... sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives

de x pour des valeurs de x comprises entre les limites $-c$, $+c$, le produit yz ..... sera, pour les mêmes valeurs de x, développable en une semblable série.

En supposant $y=z=...$, on obtient cet autre corollaire :

Corollaire 2.e Si une fonction de x représentée par y est développable en une série convergente de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

pour des valeurs de x comprises entre les limites $-c$, $+c$, le carré, le cube de y, et ses diverses puissances seront, pour les mêmes valeurs de x, développable en de semblables séries, de sorte qu'on aura

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + \text{etc.} ....,$$

$$y^3 = a_0^3 + 3a_0^2a_1x + (3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2)x^2 + \text{etc.} ...,$$

etc. .....

10.e Théorème. *Lorsque deux séries convergentes, ordonnées suivant les puissances entières et positives de x, conservent des sommes égales pour toutes les valeurs numériques de x qui ne surpassent pas un nombre donné, ces deux séries sont nécessairement identiques.*

En effet, admettons que, pour des valeurs numériques de x inférieures à c, on ait constamment

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...,$$

on en conclura, en supposant $x=0$,

$$a_0 = b_0,$$

et par conséquent

$$a_1 + a_2x + ... = b_1 + b_2x + ...,$$

puis, en posant de nouveau $x=0$,

$$a_1 = b_1,$$

..... et ainsi de suite.

Concevons maintenant que dans la formule (5) on attribue à la variable x un accroissement α, dont la valeur numérique soit très-petite et inférieure à celle de $1-x$. Cette formule donnera

$$(27) \qquad 1 + (x+\alpha) + (x+\alpha)^2 + ... + (x+\alpha)^{n-1} = \frac{1-(x+\alpha)^n}{1-(x+\alpha)};$$

et, comme on aura

$$\frac{1}{1-x-\alpha}=\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{\alpha}{1-x}\right)^{-1}=\frac{1}{1-x}+\frac{\alpha}{(1-x)^2}+\frac{\alpha^2}{(1-x)^3}+\text{etc.}\ \ldots\ldots,$$

on trouvera encore

$$(28)\left\{\begin{aligned}&1+(x+\alpha)+(x^2+2\alpha x+\alpha^2)+\ldots+[x^{n-1}+(n-1)\alpha x^{n-2}+(n-1)_2\alpha^2 x^{n-3}+\ldots+\alpha^{n-1}]\\&=(1-x^n-n\alpha x^{n-1}-(n)_2\alpha^2x^{n-2}-\ldots-\alpha^n)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{\alpha}{(1-x)^2}+\frac{\alpha^2}{(1-x)^3}+\ldots\ldots\right),\end{aligned}\right.$$

puis, en multipliant successivement la somme

$$\frac{1}{1-x}+\frac{\alpha}{(1-x)^2}+\frac{\alpha^2}{(1-x)^3}+\ldots\ldots$$

par les différents termes du polynome

$$(1-x^n)-n\alpha x^{n-1}-(n)_2\alpha^2x^{n-2}-\ldots\ldots-\alpha^n,$$

et ayant égard aux formules (14) et (26), on tirera de l'équation (28)

$$(29)\left\{\begin{aligned}&1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}\\&+(1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2})\alpha\\&+(1+3x+6x^2+\ldots+(n-1)_2x^{n-3})\alpha^2\\&+\text{etc.}\\&+\alpha^{n-1}\\&=\frac{1-x^n}{1-x}+\left(\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^{n-1}}{1-x}\right)\alpha+\left(\frac{1-x^n}{(1-x)^3}-\frac{nx^{n-1}}{(1-x)^2}-\frac{(n)_2x^{n-2}}{1-x}\right)\alpha^2+\text{etc.}\ \ldots\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, en vertu du 10.e théorème, les coefficients des puissances semblables de α devront être les mêmes dans les deux membres de l'équation (29). On aura donc encore

$$(30)\left\{\begin{aligned}&1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x},\\&1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(n-1)x^{n-2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^{n-1}}{1-x},\\&1+3x+6x^2+\ldots\ldots+(n-1)_2x^{n-3}=\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{x^n}{(1-x)^3}-\frac{nx^{n-1}}{(1-x)^2}-\frac{(n)_2x^{n-2}}{1-x},\\&\text{etc.}\ \ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

et généralement

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1+(m)_{m-1}x+(m+1)_{m-1}x^2+\ldots\ldots+(n-1)_{m-1}x^{n-m}= \\ & \frac{1}{(1-x)^m}-\frac{x^n}{(1-x)^m}-\frac{nx^{n-1}}{(1-x)^{m-1}}-\ldots\ldots-\frac{(n)_{m-1}x^{n-m+1}}{1-x}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part il est facile de s'assurer que la série

$$(32)\qquad 1,\ (m)_{m-1}x,\ (m+1)_{m-1}x^2,\ \ldots\ldots\ (n-1)_{m-1}x^{n-m},\ \text{etc.}\ \ldots\ldots$$

qui a pour terme général

$$(33)\qquad (m+n-1)_{m-1}x^n,$$

reste convergente par toute valeur numérique de x inférieure à l'unité. Car, pour déduire la série (32) de la série (22), il suffit de poser

$$a_n=(m+n-1)_{m-1}=(m+n-1)_n,$$

et l'on trouve alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m+n}{n+1}=1+\frac{m-1}{n+1}.$$

Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre n, sans changer la valeur de m, la valeur précédente du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ convergera vers la limite $\omega=1$. On aura donc aussi $\frac{1}{\omega}=1$, et la serie (32), en vertu du théorême 8, sera convergente pour les valeurs de x renfermées entre des limites $x=-1$, $x=+1$. Donc, pour de semblables valeurs de x, l'expression (33) et celle qu'on en déduit en remplaçant n par $n-m+1$, savoir,

$$(34)\qquad (n)_{m-1}x^{n-m+1}$$

deviendront infiniment petites en même temps que $\frac{1}{n}$. Par conséquent, si, la valeur numérique de x étant inférieure à l'unité, on fait croître indéfiniment le nombre n, les quantités

$$x^n,\ nx^{n-1},\ (n)_2x^{n-2},\ \ldots\ldots\ (n)_{m-1}x^{n-m+1}$$

dont les premières sont ce que devient la dernière quand on attribue successivement à m les valeurs particulières 1, 2, 3, ... convergeront toutes vers la limite zéro, et l'on tirera de la formule (31)

$$(35)\qquad 1+(m)_{m-1}x+(m+1)_{m-1}x^2+(m+2)_{m-1}x^3+\ldots\ldots=\frac{1}{(1-x)^m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(36)\qquad 1+(m)_1+(m+1)_2x^2+(m+2)_3x^3+\ \ldots\ldots = \frac{1}{(1-x)^m}.$$

On trouvera, par exemple,

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+\ \ldots\ldots = \dfrac{1}{1-x}, \\ 1+2x+3x^2+4x^3+\ \ldots\ldots = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \\ 1+3x+6x^2+10x^3+\ \ldots\ldots = \dfrac{1}{(1-x)^3}, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Ajoutons que l'équation (35) ou (36) peut encore s'écrire comme il suit

$$(38)\qquad (1-x)^{-m} = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\text{etc.}$$

Si dans cette dernière on remplace x par $-x$, on obtiendra la suivante

$$(39)\qquad (1+x)^{-m} = 1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}x^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\text{etc.}$$

qui subsiste, comme la formule (38), pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Enfin, si dans la formule (35) on remplace x par $\frac{x}{a}$, celle qu'on obtiendra, savoir,

$$(40)\qquad (x+a)^{-m} = a^{-m}-\frac{m}{1}a^{-m-1}x+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}a^{-m-2}x^2-\text{etc.}\ \ldots\ldots$$

subsistera pour des valeurs numériques de x inférieures à celles de a, et sera précisément ce que devient la formule (2) du § 2, quand on y remplace m par $-m$.

§ 7. *Développements des exponentielles* e^x, A^x.

Si, dans la formule (6) du § 2 et la formule (38) du § 6, on remplace x par α, elles donneront

$$(1)\qquad (1+\alpha)^m = 1 + m\alpha + \frac{m^2\alpha^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{m^3\alpha^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \text{etc.} \ldots,$$

$$(2)\qquad (1-\alpha)^{-m} = 1 + m\alpha + \frac{m^2\alpha^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{m}\right) + \frac{m^3\alpha^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right) + \text{etc.} \ldots$$

Si maintenant on fait croître indéfiniment le nombre m, et décroître indéfiniment la valeur numérique de α, mais de manière que le produit

$$m\alpha$$

converge vers une limite finie x, les divers termes du second membre, dans chacune des formules (1) et (2), s'approcheront sans cesse des différents termes de la série

$$(3)\qquad 1,\ x,\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \ldots$$

qui restera convergente pour une valeur finie quelconque de la variable x. En effet le terme général de la série (3) sera

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n};$$

et, si l'on pose

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n},$$

le rapport

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\omega = 0$. Donc la série (3) sera convergente pour toutes les valeurs finies de x comprises entre les limites

$$x = -\frac{1}{0} = \infty, \qquad x = \frac{1}{0} = \infty,$$

c'est-à-dire, pour une valeur finie quelconque de la variable x. Cela posé, en admettant que l'on ait

$$(4)\qquad \lim(m\alpha) = x,$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$(5)\qquad lim(1+\alpha)^m = lim(1-\alpha)^{-m} = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+ \text{ etc. .....}$$

Il y a plus. Pour que la formule (4) entraîne la formule (5), il n'est pas nécessaire que m, venant à croître indéfiniment, conserve toujours une valeur entière. Car, si l'on nomme μ une quantité positive, qui croisse indéfiniment tandisque α diminue, mais de manière que l'on ait

$$(6)\qquad lim(\mu\alpha) = x,$$

et m le nombre entier immédiatement inférieur à μ, alors, μ étant renfermé entre les deux nombres m, $m+1$, le rapport $\frac{\mu}{m}$, compris entre 1 et $1+\frac{1}{m}$, aura pour limite l'unité. Donc la formule (6) entraînera les formules (4), (5), et comme on aura d'ailleurs

$$(1+\alpha)^\mu = [(1+\alpha)^m]^{\frac{\mu}{m}},\ (1-\alpha)^{-\mu} = [(1-\alpha)^{-m}]^{\frac{\mu}{m}}$$

par conséquent

$$lim(1+\alpha)^\mu = lim(1+\alpha)^m,\quad lim(1-\alpha)^{-\mu} = lim(1-\alpha)^{-m},$$

on trouvera encore

$$(7)\qquad lim(1+\alpha)^\mu = lim(1-\alpha)^{-\mu} = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+ \text{ etc. .....}$$

La formule (6) sera vérifiée, si l'on suppose

$$\mu = \frac{x}{\alpha},$$

puisque, dans cette hypothèse, on aura constamment $\mu\alpha = x$. Alors la formule (7) donnera

$$(8)\qquad lim(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = lim(1-\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}} = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+ \text{ etc. .....;}$$

puis, en réduisant x à l'unité, et nommant e la somme de la série (3) pour $x=1$, en sorte qu'on ait

$$(9)\qquad e = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+ \text{ .....} = 2{,}7182818 \text{ .....},$$

on trouvera

$$(10)\qquad lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = lim(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = e.$$

On aura par suite

$$(11)\qquad lim(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = lim(1-\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}} = e^x;$$

et l'on tirera de la formule (11) jointe à la formule (8)

$$(12)\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc. .....}$$

Le nombre e est celui qui sert de base au système des logarithmes qu'on appelle *hyperboliques* ou *Népériens*. L'équation (12) qui fournit le développement d'une exponentielle de la forme e^x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, subsiste, quelle que soit la valeur finie attribuée à la variable x.

Si, α étant positif, on prend $x = m\alpha$, les formules (1), (2) donneront

$$(13)\quad \begin{cases} (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \text{etc. ....} \\ (1-\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right) + \text{etc. .....} \end{cases}$$

et de ces dernières, comparées à l'équation (12), on tirera

$$(14)\qquad (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} < e^x < (1-\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}},$$

par conséquent

$$(15)\qquad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < e < (1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

La formule (15) subsiste pour une valeur positive quelconque de α.

Observons encore qu'en vertu de l'équation (12), la formule (7) sera réduite à

$$(16)\qquad lim(1+\alpha)^{\mu} = lim(1-\alpha)^{-\mu} = e^x.$$

Donc l'équation (6) entraînera toujours la formule (16).

Soit maintenant A une quantité positive quelconque. Désignons, à l'aide de la lettre caractéristique L, les logarithmes pris dans le système dont la base est A, et à l'aide de la lettre caractéristique l les logarithmes Népériens pris dans le système dont la base est e. Enfin soit

(17) $$a=\mathrm{l}(A)=\frac{1}{\mathrm{L}(e)} \; *$$

le logarithme Népérien de A. On aura

(18) $$A=e^a,$$

et par suite

(19) $$A^x=e^{ax}=1+ax+\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.} \ldots\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

(20) $$A^x=1+x\mathrm{l}(A)+\frac{x^2[\mathrm{l}(A)]^2}{1.2}+\frac{x^3[\mathrm{l}(A)]^3}{1.2.3}+\text{etc.} \ldots\ldots$$

Cette dernière formule subsiste, comme l'équation (12), pour une valeur finie quelconque de la variable x.

---

* Le logarithme $x=\mathrm{L}(y)$ du nombre y, dans le système dont la base est A, n'est autre chose que l'exposant x de la puissance à laquelle il faut élever A pour obtenir y, c'est-à-dire, la valeur de y propre à vérifier l'équation

$$y=A^x.$$

Cela posé, soient $x'=\mathrm{L}'(y)$ et $b=\mathrm{L}'(A)$ les logarithmes de y et de A, relativement à une nouvelle base A' distincte de A. On aura

$$A=A'^b, \quad A^x=A'^{bx},$$

et par suite $x'=bx$

$$\frac{x'}{x}=b.$$

Donc le rapport entre les logarithmes x', x de y, dans deux systèmes différents, conserve la même valeur b, quel que soit y. Si l'on pose en particulier $A'=e$, on trouvera

$$\mathrm{l}(A)=\frac{\mathrm{l}(A)}{\mathrm{L}(A)}=\frac{\mathrm{l}(e)}{\mathrm{L}(e)}=\frac{1}{\mathrm{L}(e)}.$$

§ 8. *Des séries doubles ou multiples. Nombres de Bernoulli.*

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} u_{0,0}, & u_{0,1}, & u_{0,2}, \ldots\ldots\ldots \\ u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \ldots\ldots\ldots \\ u_{2,0}, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \ldots\ldots\ldots \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

des quantités quelconques rangées sur des lignes horizontales et verticales, de manière que chaque série horizontale ou verticale renferme une infinité de termes. Le systéme de ces quantités sera ce qu'on peut appeller une *serie double*, et ces quantités elles-mêmes seront les différents termes de la série, qui aura pour *terme général*

$$u_{m,\,m'}$$

m, m' désignant deux nombres entiers quelconques. Pareillement on peut imaginer une série triple dont le terme général

$$u_{m,\,m',\,m''}$$

serait une fonction donnée des trois indices ou nombres entiers m, m', m'', une série quadruple ..... et finalement une série multiple dont le terme général serait une fonction de divers indices m, m', m'', m''', ... chacun de ces indices pouvant recevoir successivement les valeurs entières

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots$$

Cela posé, nommons s_n la somme formée par l'addition d'un nombre fini ou même infini de termes de la série multiple, cette somme étant composée de manière qu'elle renferme au moins tous les termes dans lesquels la somme des indices est inférieure à n, et que jamais elle ne comprenne un terme correspondant à des indices donnés sans renfermer en même temps tous les termes qu'on en déduit en remplaçant ces mêmes indices, ou quelques uns d'entre eux, par des indices moindres. Si, toutes les fois que les deux conditions précédentes sont remplies, la somme s_n converge, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe s, la série multiple sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Dans le cas contraire la série multiple sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Si, dans le premier cas, on pose

$$(2)\qquad s = s_n + r_n,$$

r_n sera le reste de la série multiple, et ce reste, qui représentera ce qu'on peut nommer la somme de tous les termes non compris dans s_n, deviendra infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. Enfin, si l'on pose dans le même cas

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = s_1, \\ v_1 = s_2 - s_1, \\ v_2 = s_3 - s_2, \\ \text{etc. .....}, \end{array} \right\}$$

et généralement

$$(4)\qquad v_n = s_{n+1} - s_n,$$

la série simple

$$(5)\qquad v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots$$

sera elle-même une série convergente qui aura pour somme s, pour terme général v_n, et pour reste r_n.

Comme, d'après ce qu'on vient de dire, les termes non compris dans la somme s_n, se réduiront soit aux différents termes dans lesquels la somme des indices est au moins égale à n, soit à une partie de ces mêmes termes, on peut évidemment énoncer la proposition suivante.

1.er Théorême. *Une série multiple sera convergente, si dans cette série les termes où la somme des indices devient au moins égale à n, étant ajoutés les uns aux autres en tel nombre et en tel ordre que l'on voudra, fournissent une somme qui devienne infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n.* Il y a plus. Si tous les termes de la série multiple sont positifs, cette série ne pourra être convergente sans que la condition que nous venons d'énoncer soit remplie, et, dans ce cas, on pourra évidemment, sans détruire la convergence de la série, changer les signes de tous ses termes ou de quelques uns d'entre eux. On peut donc encore énoncer cet autre théorême.

2.e Théorême. *Une série multiple est toujours convergente, lorsque les valeurs numériques de ses différents termes forment une série convergente.*

Si les différents termes de la série proposée étaient les uns positifs, les autres négatifs, il pourrait arriver que la série fût convergente, et que les termes dans lesquels la somme des indices serait au moins égale à n, étant ajoutés les uns aux autres dans un certain ordre, ne donnâssent pas toujours une somme infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. cette remarque est applicable même aux séries simples. Ainsi, en particulier, si l'on considère la série simple

$$(6)\qquad 1,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots\ldots \pm\frac{1}{n},\ \mp\frac{1}{n+1},\ \text{etc.}\ldots,$$

on aura

(7) $$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n};$$

et, comme les valeurs numériques des différences

(8) $$\left\{\begin{array}{l} s_{n+1} - s_n = \mp \frac{1}{n+1}, \\ s_{n+2} - s_n = \mp \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right), \\ s_{n+3} - s_n = \pm \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right), \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

seront toutes renfermées entre les limites

(9) $$\frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

qui deviennent infiniment petites pour des valeurs infiniment grandes de n, on peut affirmer que la somme s_n convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite fixe s, et que la série (6) sera convergente. Mais si, au lieu d'ajouter les uns aux autres les termes

$$\mp \frac{1}{n+1}, \quad \pm \frac{1}{n+2}, \quad \mp \frac{1}{n+3}, \text{ etc. } \dots$$

pris dans l'ordre où ils se trouvent, on venait à intervertir cet ordre en choisissant parmi eux des termes affectés du même signe, par exemple, les suivants

$$\pm \frac{1}{n+2}, \quad \pm \frac{1}{n+4}, \dots \pm \frac{1}{n+2n} = \pm \frac{1}{3n},$$

la valeur numérique de la somme de ces derniers termes, savoir,

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{3n}$$

surpasserait évidemment le produit

$$n \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{3},$$

et cesserait d'être infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n.

Lorsqu'une série multiple est uniquement composée de termes positifs, alors, pour que la condition énoncée dans le premier théorème soit remplie, et par suite pour qu'on soit assuré de la convergence de la série, il suffit évidemment qu'en adoptant, pour former la somme désignée par s_n, un des différents modes qui peuvent satisfaire aux conditions précédemment indiquées, on obtienne une valeur de s_n qui converge vers une limite fixe s, tandisque n croît indéfiniment. De cette remarque, jointe au théorème 2, on déduit immédiatement la proposition suivante.

3.° Théorème. *Nommons s_n la somme formée par l'addition d'un nombre fini ou même infini de termes d'une série multiple, cette somme étant composée de manière qu'elle renferme au moins tous les termes dans lesquels la somme des indices est inférieure à n, et que jamais elle ne renferme un terme correspondant à des indices donnés, sans renfermer en même temps tous les termes qu'on en déduit en remplaçant ces mêmes indices par des indices moindres. Si, dans un cas particulier où ces deux conditions soient remplies, la somme s_n et celle qu'on obtient en substituant aux différents termes qui la composent leurs valeurs numériques, convergent l'une et l'autre vers des limites fixes, il en sera de même dans tous les cas, et la série proposée sera convergente.*

Scholie. Il est important d'observer que les deux sommes dont il s'agit ici convergeront vers des limites fixes, si la série (5) et celle en laquelle la série (5) se transforme lorsqu'aux sommes de termes désignées par v_0, v_1, v_2, ... on substitue les sommes des valeurs numériques de ces mêmes termes, sont l'une et l'autre convergentes.

Considérons, pour fixer les idées, une série double, par exemple, la série (1): Si cette série est convergente, alors, en prenant pour s_n la somme des termes dans lesquels les indices offrent une somme inférieure à n, on trouvera

(10) $$v_n = u_{0,n} + u_{1,n-1} + \ldots\ldots + u_{n-1,1} + u_{n,0},$$

et la série (5), réduite à

(11) $$u_{0,0}, \quad u_{0,1} + u_{1,0}, \quad u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,0}, \text{ etc. } \ldots\ldots$$

sera une série simple convergente, dont la somme s ne différera pas de celle de la série double. Si, dans le même cas, on prend pour s_n la somme des termes où le premier indice est inférieur à n, on trouvera

(12) $$v_n = u_{n,0} + u_{n,1} + u_{n,0} + \text{etc. } \ldots\ldots,$$

par conséquent chacune des séries horizontales comprises dans le tableau n.° 1 sera convergente, et les sommes de ces séries convergentes, savoir,

(13) $$u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2} + \text{etc.}, \; u_{1,0} + u_{1,1} + u_{1,2} + \text{etc.}, \; u_{2,0} + u_{2,1} + u_{2,2} + \text{etc.}, \ldots$$

formeront elles-mêmes une nouvelle série convergente dont la somme sera encore s. Enfin, si l'on prend pour s_n la somme des termes de la série double où le second indice est inférieur à n, on trouvera

$$(14) \qquad v_n = u_{0,n} + u_{1,n} + u_{2,n} + \text{etc.} \ldots ;$$

par conséquent chacune des séries verticales comprises dans le tableau n.° 1 sera convergente, et les sommes de ces séries convergentes, savoir

$$(15) \quad u_{0,0} + u_{1,0} + u_{2,0} + \text{etc.},\ u_{0,1} + u_{1,1} + u_{2,1} + \text{etc.}\ u_{0,2} + u_{1,2} + u_{2,2} + \text{etc.}, \ldots$$

formeront à leur tour une nouvelle série convergente dont la somme sera encore s. Ajoutons que du théorème 3 et du scholie placé à la suite de ce théorème on déduira immédiatement la proposition suivante :

4.° Théorême. *Si des trois séries simples* (11), (13), (15) *l'une est convergente, et demeure convergente, tandisque l'on remplace les quantités* $u_{0,0}$, $u_{1,0}$, $u_{0,1}$, $u_{2,0}$ etc. *par leurs valeurs numériques, les deux autres seront pareillement convergentes, et la série* (1) *sera une série double convergente, dont la somme ne différera pas de celles des trois séries simples dont il s'agit.*

Pour exprimer que s représente la somme de la série (1) supposée convergente, nous écrirons simplement

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} s = u_{0,0} + u_{0,1} + u_{0,2} + \text{etc.} \ldots \\ \quad + u_{1,0} + u_{1,1} + u_{1,2} + \text{etc.} \ldots \\ \quad + u_{2,0} + u_{2,1} + u_{2,2} + \text{etc.} \ldots \\ \quad \text{etc.} \ldots \end{array} \right.$$

Soit maintenant z une fonction de deux variables x, y. Pour que cette fonction soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, y, c'est-à-dire, en d'autres termes, pour que z puisse être considéré comme équivalent à la somme d'une semblable série, il ne suffira pas, comme on pourrait le croire au premier abord, que z soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, et le coefficient de chacune de ces puissances en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de y, en sorte qu'on ait

$$(17) \qquad z = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \text{etc.} \ldots ,$$

$$(18)\quad \begin{cases} u_0 = a_{0,0} + a_{0,1}y + a_{0,2}y^2 + \text{etc. .....}, \\ u_1 = a_{1,0} + a_{1,1}y + a_{1,2}y^2 + \text{etc. .....}, \\ u_2 = a_{2,0} + a_{2,1}y + a_{2,2}y^2 + \text{etc. .....}, \end{cases}$$

et par suite

$$(19)\quad \begin{cases} z = a_{0,0} + a_{0,1}y + a_{0,2}y^2 + ... + (a_{1,0} + a_{1,1}y + a_{1,2}y^2 + ...)x \\ + (a_{2,0} + a_{2,1}y + a_{2,2}y^2 + ...)x^2 + \text{etc. .....} \end{cases}$$

Mais, en vertu du théorème 4, z sera effectivement développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, y, je veux dire, que z sera la somme de la série double

$$(20)\quad \begin{cases} a_{0,0}, \quad a_{0,1}y, \quad a_{0,2}y^2, \quad \text{etc. .....}, \\ a_{1,0}x, \quad a_{1,1}xy, \quad a_{1,2}xy^2, \quad \text{etc. .....}, \\ a_{2,0}x^2, \quad a_{2,1}x^2y, \quad a_{2,2}x^2y^2, \quad \text{etc. .....}, \\ \text{etc. .....}, \end{cases}$$

si le second nombre de la formule (19) conserve une valeur finie et déterminée, lorsqu'on y remplace les variables x, y et les coefficients

$$a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ ...;\ a_{1,0},\ a_{1,1},\ a_{1,2},\ ...;\ a_{2,0},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ ...;\ \text{etc. .....}$$

par leurs valeurs numériques.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par des exemples, concevons d'abord que l'on veuille développer, suivant les puissances entières et positives de x, y, le produit

$$z = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}.$$

Alors, pour des valeurs de x, y propres à remplir les deux conditions

$$(21)\quad x^2 < 1, \quad y^2 < 1,$$

on aura

$$(22)\quad z = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-y} + \frac{x}{1-y} + \frac{x^2}{1-y} + \text{etc. .....},$$

$$(23)\quad \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \text{etc. .....},$$

et par suite

(24) $$\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}=(1+y+y^2+\ldots)+x(1+y+y^2+\ldots)+x^2(1+y+y^2+\ldots)+\text{etc.}\ldots$$

Or comme la formule (24) continuera de subsister quand on y remplacera les variables x, y par leurs valeurs numériques, on peut affirmer que, si les conditions (21) sont remplies, le produit

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}$$

sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, y, en sorte qu'on aura

(25) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{1-x}\,\dfrac{1}{1-y}=1+y+y^2+\text{etc.}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +x+y+xy^2+\text{etc.}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +x^2+x^2y+x^2y^2+\text{etc.}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\text{etc.}\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qu'alors aussi chacune des lignes horizontales ou verticales comprises dans le second membre de la formule (25) offrira une série simple convergente, et qu'il en sera encore de même de la série simple

(26) $$1,\quad x+y,\quad x^2+xy+y^2,\quad x^3+x^2y+xy^2+y^3,\ \text{etc.}\ldots\ldots,$$

ce qu'on peut aisément vérifier en écrivant les divers termes de cette dernière comme il suit

(27) $$\frac{x-y}{x-y},\quad \frac{x^2-y^2}{x-y},\quad \frac{x^3-y^3}{x-y},\quad \frac{x^4-y^4}{x-y},\ \text{etc.}\ldots\ldots$$

Considérons en second lieu la fonction

$$z=\frac{1}{1-x-y}.$$

Si l'on suppose remplies les deux conditions

(28) $$y^2<1,\qquad x^2<(1-y)^2,$$

on aura

(29) $$\frac{1}{1-x-y}=\frac{1}{1-y}+\frac{x}{(1-y)^2}+\frac{x^2}{(1-y)^3}+\text{etc.}\ldots\ldots,$$

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.} \ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{(1-y)^2} = 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \text{etc.} \ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{(1-y)^3} = 1 + 3y + 6y^2 + 10y^3 + \text{etc.} \ldots\ldots, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

et par suite

$$(31)\ \frac{1}{1-x-y} = 1 + y + y^2 + \ldots + x(1 + 2y + 3y^2 + \ldots) + x^2(1 + 3y + 6y^2 + \ldots) + \text{etc.} \ldots$$

Toutefois on ne saurait conclure de la formule (31) qu'on ait toujours, quand les conditions (28) sont remplies

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-x-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.} \ldots \\ \qquad + x + 2xy + 3xy^2 + 4xy^3 + \text{etc.} \ldots \\ \qquad + x^2 + 3x^2y + 6x^2y^2 + 10x^2y^3 + \text{etc.} \ldots \\ \qquad + x^3 + 4x^3y + 10x^3y^2 + 20x^3y^3 + \text{etc.} \ldots \\ \qquad + \text{etc.} \ldots\ldots, \end{cases}$$

et qu'en conséquence la série simple

$$1,\quad x + y,\quad x^2 + 2xy + y^2,\quad x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,\quad \text{etc.} \ldots\ldots$$

c'est-à-dire la progression géométrique

$$1,\quad x + y,\quad (x + y)^2,\quad (x + y)^3,\quad \text{etc.} \ldots\ldots$$

soit alors nécessairement convergente. Car il est visible que cette progression sera divergente, lorsque les variables x, y étant négatives recevront des valeurs numériques inférieures à l'unité, mais dont la somme surpassera l'unité, par exemple lorsqu'on supposera

$$x = -\frac{2}{3},\quad y = -\frac{2}{3}$$

et par suite

$$x + y = -\frac{4}{3}.$$

Alors cependant les conditions (28) seront remplies. Mais, si, la valeur numérique de y étant inférieure à l'unité, la valeur numérique de x ne surpasse pas la plus petite des deux quantités

$$1-y,\quad 1+y,$$

la formule (31) continuera de subsister, tandisqu'on y remplacera les variables x, y par leurs valeurs numériques, et entrainera l'équation (32).

Concevons à présent que, pour des valeurs numériques de x inférieures à c, la fonction y de x puisse être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, et que, pour des valeurs numériques de y inférieures à c', la fonction z de y puisse être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de y, de sorte qu'on ait, entre les limites $x=-c$, $x=c$,

$$(33)\qquad y=a_0+a_1x+a_2x^2+\text{etc.}\,.....,$$

et, entre les limites $y=-c'$, $y=c'$,

$$(34)\qquad z=b_0+b_1y+b_2y^2+\text{etc.}\,.....$$

Les quantités y^2, y^3, etc. ... pourront elles-mêmes, pour des valeurs numériques de x inférieures à c, être développées en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de x, à l'aide des formules

$$(35)\qquad \begin{cases} y^2=a_0^2+2a_0a_1x+(2a_0a_2+a_1^2)\,x^2+\text{etc.}\,........., \\ y^3=a_0^3+3a_0^2a_1x+(3a_0^2a_2+3a_0a_1^2)\,x^2+\text{etc.}\,..., \\ \text{etc.}\,..... \end{cases}$$

(voyez le § 6, 9.e théorême, corollaire 2), et l'on aura par suite

$$(36)\quad z=b_0+b_1(a_0+a_1x+a_2x^2+...)+b_2(a_0^2+2a_0a_1x+\,...)+\text{etc.}\,......$$

Toutefois on ne devra point conclure de la formule (36) que z soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entieres et positives de x, et que l'on ait

$$(37)\quad z=b_0+a_0b_1+a_0^2b_2+\,...+(a_1b_1+2a_0a_1b_2+\,...)\,x+(a_2b_1+\,...)\,x^2+\text{etc.}$$

pour toutes les valeurs numériques de x qui, étant inférieures à c, fournissent des valeurs numériques de y inférieures à c'. Mais, en vertu du théorême 2, la formule (37) deviendra, pour une valeur donnée de x, une conséquence nécessaire de la formule (36),

si les séries comprises dans les seconds membres des formules (33), (34) restent convergentes quand on réduit chaque terme à sa valeur numérique après avoir substitué dans la première série la valeur donnée de x, et dans la seconde série une valeur de y égale à la somme des valeurs numériques des termes de la première série. Or c'est ce qui arrivera nécessairement, si l'on attribue à x une valeur numérique inférieure à c, et pour laquelle la somme des valeurs numériques des termes de la première série soit inférieure à c'. On peut donc énoncer la proposition suivante:

5.e Théorême. *Supposons que, pour des valeurs numériques de x inférieures à c, y soit développable en une première série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, et que, pour des valeurs numériques de y inférieures à c', z soit développable en une seconde série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de y. z sera développable en une nouvelle série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable x, pour toute valeur de cette variable choisie entre les limites $-c$, $+c$ de telle manière que la somme de valeurs numériques des termes de la première série soit inférieure à c'.*

Supposons, pour fixer les idées,

(38) $$y = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

et

(39) $$z = \frac{1}{1-y} = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

On tirera de l'équation (38), pour une valeur quelconque de la variable x,

(40) $$y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \text{etc. .....}$$

et de la formule (39), pour une valeur numérique de y inférieure à l'unité,

(41) $$z = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc. .....}$$

On aura donc

(42) $$z = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \ldots\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} - \ldots\right)^2 + \text{etc.}$$

par conséquent

(43) $$\left\{\begin{aligned} z = \frac{x}{1-e^{-x}} &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \ldots\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} - \ldots\right) \\ &+ \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{x^4}{16} + \ldots\right) + \text{etc. ...} \end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs de x qui rendront $y^2 < 1$, c'est-à-dire pour toute valeur positive de x, et pour toute valeur négative comprise entre les limites o, —1,250 ..., le nombre 1,250 ... étant la racine positive unique de l'équation

$$(44)\qquad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \, . \, 3} + \frac{x^3}{2 \, . \, 3 \, . \, 4} + \text{etc.} \ldots = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{e^x - 1}{x} = 2.$$

Or il ne résulte pas de la formule (43) que la fonction

$$z = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

soit développable, pour toutes les valeurs positives de x, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et que l'on ait par suite, en prenant $x > 0$,

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{1 - e^{-x}} = \\ 1 + \dfrac{1}{2}x + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24}\right)x^3 + \left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{72} - \dfrac{1}{120}\right)x^4 - \text{etc.} \ldots, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(46)\quad \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\,\frac{x^2}{1 \, . \, 2} - \frac{1}{30}\,\frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} + \frac{1}{42}\,\frac{x^6}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5 \, . \, 6} - \text{etc.} \ldots$$

Mais, en vertu du théorême 5, la formule (42) ou (43) entraînera l'équation (46) si la valeur positive ou négative de x est comprise entre les limites

$$-1{,}250 \ldots\ldots, \qquad +1{,}250 \ldots\ldots$$

puisque alors les valeurs numériques des termes de la série comprise dans le second membre de la formule (40) fourniront une somme inférieure à l'unité.

En calculant les coefficients des diverses puissances de x dans le second membre de la formule (45), on s'assure facilement que ceux de la troisième et de la cinquième puissance se réduisent à zéro. Or on peut démontrer qu'il doit en être de même des coefficients de toutes les puissances de degré impair supérieures à la première, c'est-à-dire, que la différence

$$(47)\qquad \frac{x}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{2}x$$

développée suivant les puissances entières et positives de x doit uniquement renfermer des puissances de degré pair. En effet cette différence pouvant s'écrire comme il suit

$$(48)\qquad \frac{1}{2}x\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{2}\,\frac{x\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

ne change pas de valeur, quand on y change le signe de x. Son développement, devant jouir de la même propriété, ne saurait renfermer les puissances impaires de la variable x.

Observons encore que l'expression

$$(49)\qquad \frac{2x}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{x}{x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}+\text{etc.}}$$

pouvant être présentée sous la forme

$$1-\left(\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}+\ldots\right)+\left(\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}+\ldots\right)^2-\text{etc.}\ \ldots$$

pour toute valeur numérique de x inférieure au nombre $2,179\ldots$ c'est-à-dire à la racine positive de l'équation

$$(50)\qquad \frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}+\text{etc.}\ldots = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{e^{x}-e^{-x}}{2x} = 2$$

sera dans ce cas, en vertu du théorème 5, développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Donc la fonction

$$\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

que l'on déduit de l'expression (49), en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, et par suite l'expression (48) seront développables en séries convergentes ordonnées selon les puissances entières et positives de la variable x pour toute valeur numérique de cette variable inférieure au nombre $4,35\ldots = 2\,(2,179\ldots)$. Donc la formule (46) subsistera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites

$$x = -4,35\ \ldots, \qquad x = 4,35\ \ldots$$

Il y a plus. Comme, pour de telles valeurs de x, le produit de la somme

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{1.2}-\frac{1}{30}\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{1}{42}\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{etc.} \ldots$$

par la différence $1-e^{-x}$ à laquelle on peut toujours substituer son développement, savoir,

$$x-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}-\text{etc.} \ldots,$$

se réduira identiquement à x, en vertu de la formule (46), on peut affirmer que cette formule subsistera pour toute valeur de x inférieure au nombre c, si ce nombre est tel que la série

$$1,\quad \frac{1}{2}x,\quad \frac{1}{6}\frac{x^2}{1.2},\quad -\frac{1}{30}\frac{x^4}{1.2.3.4},\quad \frac{1}{42}\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6},\quad \text{etc.} \ldots$$

reste convergente entre les limites $x=-c$, $x=c$. Donc, par suite, la formule

$$(51)\qquad x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1+\frac{1}{6}\frac{2^2x^2}{1.2}-\frac{1}{30}\frac{2^4x^4}{1.2.3.4}+\frac{1}{42}\frac{2^6x^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{etc.} \ldots,$$

que l'on déduit de l'équation (46), en y remplaçant x par $2x$, subsistera pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=-2c$, $x=2c$. Nous prouverons plus tard que le nombre c, dont il s'agit ici, est précisement égal à $\frac{\pi}{2}$.

Quant aux facteurs numériques

$$(52)\qquad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad \text{etc.} \ldots$$

qui, dans les seconds membres des formules (46) et (51), se trouvent pris tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, et multipliés par les divers termes des développements des fonctions

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1 \quad \text{et} \quad \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-1,$$

ils sont ce qu'on appelle les nombres de Bernoulli.

§. 9. *Sommation des puissances entières des nombres naturels. Volume d'une pyramide à base quelconque.*

A l'aide des principes établis dans les paragraphes précédents, on peut aisément déterminer la somme des m^{mes} puissances des nombres naturels

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots\ldots\ n,$$

savoir,

(1) $$1+2^m+3^m+\ldots\ldots+n^m=S(n^m).$$

En effet, comme on a

$$n(n+1)=n^2+n,$$

$$n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n,$$

etc. .....

les formules (15) du § 1.er donneront

(2) $$\left\{\begin{aligned} S(n)&=\frac{n(n+1)}{2},\\ S(n^2)+S(n)&=\frac{n(n+1)(n+2)}{2},\\ S(n^3)+3S(n^2)+2S(n)&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\\ S(n^4)+6S(n^3)+11S(n^2)+6S(n)&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5},\\ &\text{etc. .....}\end{aligned}\right.$$

et par conséquent

(3) $$\left\{\begin{aligned} S(n)&=\frac{n(n+1)}{2},\\ S(n^2)&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3},\\ S(n^3)&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-n(n+1)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\\ S(n^4)&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-\frac{3}{2}n^2(n+1)^2-11\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3n(n+1),\\ &\text{etc. .....}\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&1+2+3+\dots\dots\dots+n=\frac{n(n+1)}{2},\\
&1+4+9+\dots\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\,.\,3},\\
&1+8+27+\dots\dots\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\\
&1+16+81+\dots\dots\dots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2\,.\,3\,.\,5},\\
&\text{etc. .....}
\end{aligned}\right.$$

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (4) on aura

$$(5)\qquad 1+8+27+\dots\dots\dots+n^3=(1+2+3+\dots\dots+n)^2.$$

Ainsi, en particulier, on trouvera

$$1+8+27+64=(1+2+3+4)^2.$$

On pourrait facilement déduire les formules (3) ou (4) de l'équation (14) ou (15) du § 5. Effectivement, si l'on pose $x=n$ dans l'équation (15) du § 5, on en tirera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&n^m=n(n+1)\dots(n+m-1)-\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}n(n+1)\dots\dots(n+m-2)+\dots\\
&\dots\dots\pm\frac{3^{m-1}-2^m+1}{1\,.\,2}n(n+1)(n+2)\mp\frac{2^{m-1}-1}{1}n(n+1)\pm n,
\end{aligned}\right.$$

et par suite

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(n^m)=S[n(n+1)\dots(n+m-1)]-\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}S[n(n+1)\dots(n+m-2)]+\dots\\
&\dots\dots\pm\frac{3^{m-1}-2^m+1}{1\,.\,2}S[n(n+1)(n+2)]\mp\frac{2^{m-1}-1}{1}S[n(n+1)]\pm S(n),
\end{aligned}\right.$$

puis on conclura de cette dernière combinée avec les formules (15) du § 1.er

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(n^m)=\frac{n(n+1)\dots(n+m)}{m+1}-\frac{m-1}{2}n(n+1)\dots\dots(n+m-1)+\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\pm\frac{3^{m-1}-2^m+1}{1\,.\,2}\,\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\mp\frac{2^{m-1}-1}{1}\,\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\pm\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}\right.$$

En opérant de la même manière, on tirera de la formule (14) du § 5

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
S(n^m) &= \frac{(n+1)\,n \ldots (n-m+1)}{m+1} + \frac{m-1}{2}(n+1)\,n \ldots\ldots (n-m+2) + \ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots + \frac{3^{m-1}-2^m+1}{1\,.\,2}\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{4} + \frac{2^{m-1}+1}{1}\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\,n}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

Si, dans l'une des formules (8), (9), on pose successivement

$$m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad \text{etc.} \ldots\ldots,$$

on retrouvera précisément les formules (3) ou (4).

On pourrait encore faire servir les nombres de Bernoulli au calcul de la somme $S(n^m)$. En effet cette somme est évidemment le coefficient de

$$\frac{x^m}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots m}$$

dans le développement du polynome

$$(10) \qquad e^x + e^{2x} + \ldots\ldots + e^{nx} = e^x \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$$

suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. On a d'ailleurs, quel que soit x,

$$(11) \qquad e^{nx}-1 = nx + \frac{n^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{etc.} = x\left(n + \frac{n^2 x}{1\,.\,2} + \frac{n^3x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots\right),$$

et, pour des valeurs numériques de x inférieures à 1,250 ..... (voyez le § précédent)

$$(12) \qquad \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{42}\frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} - \text{etc.}\ldots\ldots$$

les coefficients

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \ldots\ldots$$

que renferment le troisième terme et les suivants, étant précisément les nombres de Bernoulli. Cela posé on tirera de la formule (10), pour des valeurs numériques de x inférieures à 1,250 .....,

$$(13)\left\{\begin{aligned} & n + x\,\mathrm{S}(n) + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{S}(n^2) + \frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{S}(n^3) + \ldots + \frac{x^m}{1.2\,..m}\mathrm{S}(n^m) + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = \left(n + \frac{n^2}{2}x + \frac{n^3}{3}\frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{1}{42}\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots\right) \end{aligned}\right.$$

puis, en développant le second membre de la formule (13) suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, et égalant entre eux les coefficients des puissances de même degré renfermées dans les deux membres, on trouvera

$$(14)\left\{\begin{aligned} & \mathrm{S}(n) = \frac{n^2}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}, \\ & \mathrm{S}(n^2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\,.\,3}, \\ & \mathrm{S}(n^3) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \\ & \mathrm{S}(n^4) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{1}{6}2n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2\,.\,3\,.\,5}, \\ & \text{etc.} \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et généralement

$$(15)\qquad \mathrm{S}(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{m}{2}n^{m-1} - \frac{1}{30}\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4}n^{m-3} + \frac{1}{42}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}n^{m-5} - \text{etc.}$$

Les deux premières des formules (4) ou (14) fournissent le moyen de calculer le nombre des boulets dont se composent des piles à base carrée ou rectangulaire telles qu'on les construit dans les arsenaux; et d'abord, si des boulets sont distribués dans plusieurs couches superposées de manière à figurer une pyramide a base carrée, le nombre des boulets compris dans cette pyramide se trouvera évidemment déterminé par la seconde des formules (14). De plus, si le carré qui servait de base à la pyramide, et dont chaque côté renfermait n boulets, se change en un rectangle dont les deux côtés renferment

le premier n, le second $n+m$ boulets, et la pyramide elle-même en un prisme tronqué terminé supérieurement non par un boulet unique, mais par une file de $m+1$ boulets placés à la suite l'un de l'autre, le nombre total des boulets contenus dans le prisme tronqué sera évidemment

$$m+1+2(m+2)+3(m+3)+\dots\dots+n(m+n)$$

$$=m\,S(n)+S(n^2)=\left(m+\frac{2n+1}{3}\right)S(n),$$

ou, ce qui revient au même,

(16) $$\left(m+\frac{2n+1}{3}\right)\frac{n(n+1)}{2},$$

La formule (16) fournit la règle connue, en vertu de laquelle on obtient le nombre des boulets que contient une pile à base carrée, en multipliant le facteur

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

c'est-à-dire, le nombre des boulets compris dans l'une des faces obliques et triangulaires de la pile, par la somme

$$m+\frac{2n+1}{3}$$

c'est-à-dire par le tiers du nombre des boulets compris dans l'arête qui termine la pile et dans les côtés de la base parallèles à cette arête.

Si, après avoir divisé par n^{m+1} les deux membres de la formule (8), (9) ou (15), on fait croître indéfiniment le nombre n, le rapport $\frac{1}{n}$ et ses diverses puissances s'approchant alors indéfiniment de la limite zéro, on trouvera

(17) $$\lim\frac{S(n^m)}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}.$$

Ainsi, en particulier, si l'on pose successivement $m=1$, $m=2$, etc. ... on trouvera

(18) $$\lim\frac{S(n)}{n^2}=\frac{1}{2},$$

(19) $$\lim\frac{S(n^2)}{n^3}=\frac{1}{3},$$

etc. .....

On peut appliquer les formules (18) et (19) à l'évaluation de la surface d'un triangle ou de la solidité d'une pyramide, en opérant comme il suit.

Considérons d'abord un triangle dont la base soit B et la hauteur H. Divisons cette hauteur H en n parties égales à

(20) $$h = \frac{H}{n}$$

par $n - 1$ droites parallèles à la base B. Les portions de ces droites qui se trouveront renfermées dans le triangle seront respectivement

$$b, \quad 2b, \quad 3b, \ldots\ldots (n-1)b,$$

la valeur de b étant

(21) $$b = \frac{B}{n}.$$

Cela posé, concevons en premier lieu que les deux angles du triangle adjacents à la base B soient aigus. L'aire du triangle sera évidemment supérieure à la somme des aires des retangles inscrits qui auraient pour bases les longueurs

$$b, \quad 2b, \quad 3b, \ldots\ldots (n-1)b,$$

et inférieure à la somme des aires des rectangles circonscrits qui auraient pour bases les longueurs

$$b, \quad 2b, \quad 3b, \ldots\ldots (n-1)b, \quad nb = B,$$

la hauteur de chaque rectangle inscrit ou circonscrit étant la distance h entre deux parallèles consécutives. Donc si l'on prend pour valeur approchée de l'aire du triangle la somme des aires des rectangles circonscrits, savoir,

(22) $$bh + 2bh + \ldots\ldots + nbh = bh\,\mathrm{S}(n) = \frac{\mathrm{S}(n)}{n^2} BH,$$

l'erreur commise sera inférieure à l'aire $nbh = \frac{BH}{n}$ du plus grand des rectangles circonscrits. Si maintenant on fait croître indéfiniment le nombre n, l'erreur commise $\frac{BH}{n}$ décroîtra sans cesse, et la limite de l'expression (21), qui sera, en vertu de la formule (18),

(23) $$\frac{1}{2} BH,$$

offrira la véritable valeur de l'aire du triangle proposé.

Si l'un des angles adjacents à la base B devenait obtus, on arriverait encore aux mêmes conclusions en substituant aux rectangles ci-dessus mentionnés des parallélogrammes construits sur les mêmes bases, et dont les côtés pourraient être parallèles à l'un des côtés du triangle donné.

Considérons à présent une pyramide à base triangulaire ou polygonale. Nommons B la base de cette pyramide, H sa hauteur, et divisons cette hauteur en n portions égales à

(24) $$h = \frac{H}{n},$$

par $n-1$ plans parallèles à celui de la base B. Les sections faites par ces plans dans la pyramide seront semblables à la base B, et les aires de ces sections seront respectivement

$$b,\ 4b,\ 9b, \ldots.. (n-1)^2 b,$$

la valeur de b étant

(25) $$b = \frac{B}{n^2}.$$

Cela posé, le volume de la pyramide sera évidemment supérieur à la somme des volumes des prismes inscrits qui auraient pour bases les sections dont il s'agit, et inférieur à la somme des volumes des prismes circonscrits qui auraient pour bases les mêmes sections et la base de la pyramide, la hauteur de chaque prisme étant la distance h entre les plans de deux sections voisines, et ses côtés étant parallèles à une droite menée de l'un quelconque des points intérieurs de la base B au sommet de la pyramide. Donc, si l'on prend pour valeur approchée du volume de la pyramide la somme des volumes des prismes circonscrits, savoir,

(26) $$bh + 4bh + 9bh + \ldots.. + n^2 bh = bh\,\mathrm{S}(n^2) = \frac{\mathrm{S}(n^2)}{n^3} BH,$$

l'erreur commise sera inférieur au volume $n^2 bh = \frac{BH}{n}$ du plus grand des prismes circonscrits. Si maintenant on fait croître indéfiniment le nombre n, l'erreur commise $\frac{BH}{n}$ décroîtra sans cesse, et la limite de l'expression (26), qui sera, en vertu de la formule (19),

(27) $$\frac{1}{3} BH,$$

offrira la véritable valeur du volume de la pyramide proposée.

§ 10. *Formules pour l'évaluation des logarithmes. Développement du logarithme d'un binome.*

En prenant les logarithmes Népériens des quantités que renferme la formule (15) du 7.e paragraphe, on en conclut

$$\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\alpha} < 1 < \frac{-\mathrm{l}(1-\alpha)}{\alpha}. \tag{1}$$

On aura donc, pour des valeurs positives de α,

$$\mathrm{l}(1+\alpha) < \alpha \tag{2}$$

et

$$-\mathrm{l}(1-\alpha) = \mathrm{l}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) > \alpha. \tag{3}$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (10) du 5.e paragraphe chacun des deux rapports qui constituent le premier et le dernier membre de la formule (1), aura pour limite l'unité, quand α deviendra infiniment petit.

Soient maintenant x une quantité quelconque, n un nombre entier très-considérable, et

$$\alpha = \frac{x}{n}. \tag{4}$$

Le binome $1+x$ sera le dernier terme de la progression arithmétique

$$1,\quad 1+\alpha,\quad 1+2\alpha,\ \ldots\ 1+(n-1)\alpha,\quad 1+n\alpha, \tag{5}$$

et l'on aura identiquement

$$\mathrm{l}(1+x) = \mathrm{l}\left(\frac{1+\alpha}{1}\right) + \mathrm{l}\left(\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}\right) + \ldots + \mathrm{l}\left(\frac{1+n\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right). \tag{6}$$

D'autre part, m étant un nombre entier compris entre les limites 0, n, on aura

$$\frac{1+(m+1)\alpha}{1+m\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1+m\alpha}, \qquad \frac{1+m\alpha}{1+(m+1)\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1+(m+1)\alpha}, \tag{7}$$

et par suite les formules (2), (3) donneront, pour des valeurs positives de x,

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{l}\left(\frac{1+(m+1)\alpha}{1+m\alpha}\right) < \frac{\alpha}{1+m\alpha}, \\ \mathrm{l}\left(\frac{1+(m+1)\alpha}{1+m\alpha}\right) > \frac{\alpha}{1+(m+1)\alpha}. \end{cases}$$

De ces dernières combinées avec la formule (6) on tirera

$$(9)\qquad \mathfrak{A} < \mathrm{l}(1+x) < \mathfrak{A}_1,$$

les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ étant respectivement

$$(10)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+2\alpha} + \ldots\ldots + \frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha} + \frac{\alpha}{1+n\alpha},$$

$$(11)\qquad \mathfrak{A}_1 = \alpha + \frac{\alpha}{1+\alpha} + \ldots\ldots + \frac{\alpha}{1+(n-2)\alpha} + \frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha}.$$

Lorsque x et par suite α deviennent négatifs, la formule (9) doit être évidemment remplacée par la suivante

$$(12)\qquad \mathfrak{A} > \mathrm{l}(1+x) > \mathfrak{A}_1.$$

Si l'on prend pour valeur approchée de $\mathrm{l}(1+x)$ la quantité $\mathfrak{A}$ ou la demi-somme $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1}{2}$, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(13)\qquad \mathrm{l}(1+x) = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+2\alpha} + \ldots\ldots + \frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha} + \frac{\alpha}{1+n\alpha},$$

ou bien

$$(14)\qquad \mathrm{l}(1+x) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+2\alpha} + \ldots\ldots + \frac{\alpha}{1+(n-2)\alpha} + \frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+n\alpha},$$

il est clair que l'erreur commise ne surpassera pas, dans le premier cas, la valeur numérique de la différence

$$(15)\qquad \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} = \alpha - \frac{\alpha}{1+x} = \frac{\alpha x}{1+x} = \frac{x^2}{n(1+x)},$$

et, dans le second cas, la moitié de cette valeur numérique. Donc cette erreur deviendra infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n, ou, ce qui revient au même pour des valeurs infiniment petites de α, et $l(1+x)$ aura exactement pour valeur la limite vers laquelle converge le second membre de la formule (13), tandisque α s'approche indéfiniment de la limite zéro.

Lorsque la valeur de x est renfermée entre les limites -1, $+1$, c'est à-dire, lorsqu'on a

$$x^2 < 1, \tag{16}$$

alors, en désignant par m un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à n, on a généralement

$$\frac{\alpha}{1+m\alpha} = \alpha - m\alpha^2 + m^2\alpha^3 - m^3\alpha^4 + \text{etc.} \ldots, \tag{17}$$

et par suite la formule (13) donne

$$l(1+x) = n\alpha - \alpha^2 S(n) + \alpha^3 S(n^2) - \alpha^4 S(n^3) + \ldots\ldots \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$l(1+x) = x - x^2\frac{S(n)}{n^2} + x^3\frac{S(n^2)}{n^3} - x^4\frac{S(n^3)}{n^4} + \text{etc.} \tag{19}$$

Si maintenant on fait croître indéfiniment le nombre n, alors, en ayant égard aux formules (17), (18) du § 9, on réduira l'équation (19) à la suivante

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \ldots\ldots \tag{20}$$

Cette dernière fournit la valeur exacte de $l(1+x)$, toutes les fois que la valeur numérique de x ne surpasse pas l'unité. Alors la série

$$x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, -\frac{x^4}{4}, \text{etc.} \ldots\ldots \tag{21}$$

est nécessairement convergente ; ce qu'on peut démontrer directement, attendu que, le coefficient a_n de x_n, dans cette série, étant réduit à

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

la valeur numérique du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sera la fraction

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

qui, pour des valeurs croissantes de n, s'approche indéfiniment de la limite 1. Ajoutons que la série (21) sera encore convergente pour $x = 1$, et qu'on aura par suite

(22) $$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.....},$$

mais qu'elle deviendra divergente pour $x = -1$, ce qu'il était facile de prévoir, puisqu'on a

(23) $$l(0) = -\infty.$$

Enfin, si, dans la formule (20), on remplace x par $-x$, on en tirera

(24) $$-l(1-x) = l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.....}$$

Lorsqu'à l'aide des formules (13), (14) ou (20) on aura calculé la valeur exacte ou approchée de $l(1+x)$; pour en déduire celle de $L(1+x)$, la lettre L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base serait non plus le nombre e, mais un autre nombre quelconque A, il suffira de recourir à l'équation

$$\frac{L(1+x)}{l(1+x)} = \frac{L(e)}{l(e)} = \frac{L(A)}{l(A)} = L(e) = \frac{1}{l(A)},$$

de laquelle on tire

(25) $$L(1+x) = L(e)\,l(1+x), \quad \text{ou} \quad L(1+x) = \frac{l(1+x)}{l(A)}.$$

Si dans les formules (20) et (25) on remplace x par $\frac{x}{a}$ elles donneront, pour des valeurs numériques de x inférieures à celles de a,

(26) $$l(a+x) = l(a) + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc. ....},$$

et

(27) $$L(a+x) = L(a) + \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + ...\right)L(e).$$

§ 11. *Développement d'une puissance quelconque d'un binome.*

Comme on a identiquement

$$(1)\qquad 1+x=e^{1(1+x)},$$

on en conclura, en ayant égard à la formule (20) du § 10, et supposant la valeur numérique de x inférieure à l'unité,

$$(2)\qquad 1+x=e^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\ldots}$$

On aura donc alors, quelle que soit la valeur positive ou négative de l'exposant μ,

$$(3)\qquad (1+x)^{\mu}=e^{\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right)},$$

et par suite

$$(4)\qquad (1+x)^{\mu}=1+\mu x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)+\frac{\mu^2x^2}{1.2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)^2+\text{etc.}\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l}(1+x)^{\mu}=1+\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)+\mu^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{11x^4}{24}-\ldots\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\mu^3\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)+\mu^4\left(\frac{x^4}{24}+\ldots\right)+\text{etc.}\ldots\end{array}\right.$$

Or, dans l'hypothèse admise, la somme

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}\ldots$$

conservera une valeur finie et déterminée quand on remplacera les différents termes dont cette somme se compose par leurs valeurs numériques, et l'on pourra en dire autant

des sommes que renferment les seconds membres des formules (4) et (5). Donc alors la formule (5) entraînera la suivante

$$(6)\left\{\begin{array}{c}(1+x)^{\mu}=\\ 1+\mu x+\left(\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu}{2}\right)x^2+\left(\frac{\mu^3}{6}-\frac{\mu^2}{2}+\frac{\mu}{3}\right)x^3+\left(\frac{\mu^4}{24}-\frac{\mu^3}{4}+\frac{11\mu^2}{24}-\frac{\mu}{4}\right)x^4+\text{etc.....}\end{array}\right.$$

qui se réduit à

$$(7)\quad (1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}x^4+\text{etc...}$$

Pour déterminer immédiatement le coefficient de x^n dans le second membre de l'équation (7), il suffit d'observer qu'en vertu de la formule (4) ce coefficient sera une fonction entière de μ du degré n; et que le même coefficient, devant se réduire évidemment à zéro pour les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$ de l'exposant μ, puis à l'unité pour $\mu=n$, se confondra nécessairement avec le rapport

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-n+1)}{1.2.\ldots\ldots n},$$

c'est-à-dire avec la valeur de u que fournit l'équation (3) du § 5, quand on y substitue la lettre μ à la lettre x.

Si dans l'équation (7) on remplace x par $-x$ et μ par $-\mu$, on obtiendra la suivante

$$(8)\qquad (1-x)^{-\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.....}$$

Cette dernière formule subsiste, comme l'équation (7), pour des valeurs numériques de x comprises entre les limites

$$x=-1,\quad x=1.$$

Si l'on considère en particulier le cas où l'on a

$$\mu=\frac{1}{2},$$

les formules (7) et (8) donneront

$$(9)\qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \text{etc.....},$$

et

$$(10)\qquad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \text{etc.....}$$

L'équation (9) fournit le développement en série de la racine carrée du binome $1+x$, quand la valeur numérique de x est inférieure à l'unité. De même, en posant successivement $\mu = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{4}$, etc... on déduirait de l'équation (7) les développements en séries de la racine cubique, de la racine quatrième, etc... de ce même binome.

Concevons à présent que l'on généralise les notations employées dans le § 1.er, et que l'on désigne par

$$(\mu)_n \quad \text{et} \quad [\mu]_n$$

les coefficients de x^n dans les développements des binomes

$$(1+x)^{\mu} \quad \text{et} \quad (1-x)^{-\mu}$$

suivant les puissances ascendantes et entières de x, μ représentant une quantité quelconque et n une quantité entière, positive nulle ou négative. Alors on aura, pour $n>0$,

$$(11)\qquad \begin{cases} (\mu)_n = \dfrac{\mu(\mu-1)\,.....\,(\mu-n+1)}{1.2\,.....\,n}, \\ [\mu]_n = \dfrac{\mu(\mu+1)\,.....\,(\mu+n-1)}{1.2\,.....\,n} = (\mu+n-1)_n, \end{cases}$$

pour $n=0$, lors même que μ deviendrait nul,

$$(12)\qquad (\mu)_0 = [\mu]_0 = 1,$$

enfin, pour $n<0$,

$$(13)\qquad (\mu)_n = [\mu]_n = 0;$$

et les formules (7), (8) pourront s'écrire comme il suit

$$(14)\qquad (1+x)^{\mu} = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \text{etc....},$$

$$(15)\qquad (1-x)^{-\mu} = 1 + [\mu]_1 x + [\mu]_2 x^2 + \text{etc.....}$$

Si, dans l'équation (7), on remplace x par $\frac{x}{a}$, on obtiendra la suivante

$$(16) \qquad (a+x)^{\mu} = a^{\mu} + \mu a^{\mu-1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}x^2 + \text{etc.....}$$

Cette dernière, qui subsiste pour des valeurs numériques de x inférieures à celles de a, est précisément ce qui devient la formule (2) du § 2, quand on y remplace m par μ.

---

§. 12. *Trigonométrie.*

Une longueur, comptée sur une ligne droite ou courbe, peut, comme toute espèce de grandeurs, être représentée soit par un nombre, soit par une quantité positive ou négative; savoir par un nombre lorsqu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, et par une quantité, c'est-à-dire, par un nombre précédé du signe + ou —, lorsque l'on considère la longueur dont il s'agit, comme portée à partir d'un point fixe, sur la ligne donnée, dans un sens ou dans un autre, pour servir soit à l'augmentation soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point fixe. Le point fixe dont il est ici question, et à partir duquel on doit porter les longueurs variables désignées par des quantités, est ce qu'on appelle *l'origine* de ces mêmes longueurs. On peut choisir à volonté le sens dans lequel on doit compter les longueurs désignées par des quantités positives; mais, ce choix une fois fait, il faudra nécessairement compter dans le sens opposé les longueurs qui seront désignées par des quantités négatives.

Dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on prend ordinairement pour origine des arcs l'extrémité O du rayon tiré horizontalement de gauche à droite; et c'est en s'élevant au-dessus de ce point que l'on compte les arcs positifs, c'est-à-dire, ceux que l'on désigne par des quantités positives. Dans le même cercle, lorsque le rayon se réduit à l'unité, la quantité positive ou négative s qui représente un arc sert en même temps à représenter l'angle au centre compris entre les rayons menés à l'origine et à l'extrémité de cet arc. Alors, pour obtenir ce qu'on nomme le *sinus* ou le *cosinus* de l'arc ou de l'angle s, il suffit de projetter orthogonalement le rayon mené à l'extrémité de l'arc 1.° sur le diamètre vertical, 2.° sur le diamètre horizontal. Si on prolonge ce même rayon jusqu'à la rencontre des tangentes menées à la circonférence par le point O origine des arcs et par l'extrémité supérieure P du diamètre vertical, les parties de ces tangentes interceptées entre la circonférence et les points de rencontre seront ce qu'on appelle la *tangente*

et la *cotangente* trigonométriques de l'arc s. Enfin les longueurs comptées sur le rayon prolongé entre le centre du cercle et les points de rencontre seront la *sécante* et le *cosécante* du même arc. Les sinus et cosinus, tangente et cotangente, sécante et cosécante d'un arc ou d'un angle s sont ce qu'on nomme ses *lignes trigonométriques*. On désigne encore quelque fois sous ce nom deux longueurs appellées *sinus verse* et *cosinus verse* dont la première est comprise entre l'origine de l'arc s et la projection de l'extrémité de cet arc sur le diamètre horizontal, tandisque la seconde est comprise entre l'extrémité supérieure du diamètre vertical et la projection de l'extrémité de l'arc sur le même diamètre.

Si l'on représente suivant l'usage par

$$\pi = 3,1415926 \ldots\ldots$$

le rapport de la circonférence au diamètre, la circonférence entière, dans le cercle qui a pour rayon l'unité, sera exprimée par 2π, la moitié de la circonférence par π, et le quart par $\frac{\pi}{2}$. Cela posé, il est clair que, pour obtenir l'extrémité de l'arc

$$s + 2n\pi \quad \text{ou} \quad s - 2n\pi$$

[n étant un nombre entier], il faudra porter sur la circonférence à partir de l'extrémité de l'arc s, dans le sens des arcs positifs, ou dans le sens des arcs négatifs, une longueur égale à $2n\pi$, c'est-à-dire, parcourir n fois la circonférence entière dans un sens ou dans l'autre, ce qui ramenera nécessairement au point d'où l'on était parti. Il en résulte que l'extrémité de l'arc

$$s \pm 2n\pi$$

coïncide toujours avec celle de l'arc s, et que ces deux arcs ont précisément les mêmes lignes trigonométriques.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, le sinus et le cosinus verse d'un arc se mesurent sur le diamètre vertical, le cosinus et le sinus verse sur le diamètre horizontal, la tangente trigonométrique et la cotangente sur les tangentes menées à la circonférence par l'origine des arcs et par l'extrémité supérieure du diamètre vertical, enfin la sécante et la cosécante sur le diamètre mobile qui passe par l'extrémité de l'arc. De plus le sinus, le cosinus, la sécante et la cosécante ont pour origine commune le centre C du cercle, tandisque l'origine O des tangentes et des sinus verses se confond avec l'origine des arcs, l'origine P des cotangentes et des cosinus verses étant l'extrémité supérieure du diamètre vertical. Enfin on est généralement convenu de représenter par des quantités positives les lignes trigonométriques de l'arc s dans le cas où cet arc est positif, et moindre qu'un quart de circonférence; d'où il suit que l'on doit compter positivement le sinus

et la tangente de bas en haut, le cosinus verse de haut en bas, le cosinus et la cotangente de gauche à droite, le sinus verse de droite à gauche, enfin la sécante et la cosécante dans le sens du rayon mené à l'extrémité de l'arc s.

En partant des principes que nous venons d'adopter, on reconnaitra immédiatement que le sinus verse et le cosinus verse sont toujours positifs; et de plus on déterminera sans peine les signes qui doivent affecter les autres lignes trigonométriques d'un arc dont l'extrémité est donnée. Pour rendre cette détermination plus facile, on conçoit le cercle divisé en quatre parties égales par les diamètres horizontal et vertical; et ces quatre parties sont respectivement désignées sous le nom de premier, second, troisième et quatrième quarts du cercle. Les deux premiers quarts de cercle sont situés au-dessus du diamètre horizontal, savoir le premier à droite et le second à gauche. Les deux derniers sont situés au-dessous du même diamètre, savoir le troisième à gauche et le quatrième à droite. Cela posé, si l'on cherche les signes qui doivent être attribués aux diverses lignes trigonométriques d'un arc autres que le sinus verse et le cosinus verse, suivant que l'extrémité de cet arc tombe dans un quart de cercle ou dans un autre, on trouvera que ces signes sont respectivement

	dans le 1.er quart de cercle,	dans le 2.d,	dans le 3.e,	dans le 4.e
pour le sinus et la cosécante	$+$	$+$	$-$	$-$,
pour le cosinus et la sécante	$+$	$-$	$-$	$+$,
pour la tangente et la cotangente	$+$	$-$	$+$	$-$.

On peut remarquer à ce sujet que le signe de la tangente et de la cotangente est toujours le produit du signe du sinus par le signe de cosinus.

Deux arcs représentés par deux quantités s, t sont appellés *suppléments* l'un de l'autre, lorsqu'on a

(1) $$s + t = \pi.$$

Ils seront *compléments* l'un de l'autre, si l'on a

(2) $$s + t = \frac{\pi}{2}.$$

Alors on se trouvera évidemment ramené à l'extrémité de l'arc

(3) $$s = \frac{\pi}{2} - t,$$

si l'on porte son complément t, dans le sens où l'on comptait primitivement les arcs négatifs, non plus à partir de l'origine commune O des arcs et des tangentes, mais à partir de l'origine P des cotangentes qui coïncide avec l'extrémité de l'arc $\frac{\pi}{2}$. Donc à la place d'un arc s on obtiendra son complément t, si, l'extrémité de l'arc restant la même, on transporte l'origine de cet arc de O en P, et si l'on convient en même temps de compter les arcs positifs non plus dans le sens OP, mais dans le sens PO. D'ailleurs en opérant ainsi, on échangera évidemment le rayon CO mené à l'origine des tangentes et sur lequel se mesuraient les cosinus positifs contre le rayon CO mené à l'origine des cotangentes et sur lequel se mesuraient les sinus positifs. Donc le cosinus, la cotangente et la cosécante de l'arc s se confondront avec le sinus, la tangente et la sécante de son complément t, en sorte qu'on aura généralement

$$(4) \qquad \cos s = \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right), \qquad \cot s = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - s\right), \qquad \text{coséc}\, s = \text{sec}\left(\frac{\pi}{2} - s\right).$$

Comme, dans le triangle rectangle qui a pour hypothénuse le rayon, et pour second côté le cosinus ou le sinus, le troisième côté est évidemment égal au sinus ou au cosinus, on peut affirmer que le sinus et le cosinus d'un même arc s sont liés entre eux par l'équation

$$(5) \qquad \sin^2 s + \cos^2 s = 1.$$

De même, en considérant le triangle rectangle qui a pour côtés la sécante, la tangente, et le rayon mené au point O, ou la cosécante, la cotangente, et le rayon mené au point P, on trouvera

$$(6) \qquad \text{séc}^2 s = 1 + \text{tang}^2 s,$$

ou

$$(7) \qquad \text{coséc}^2 s = 1 + \cot^2 s.$$

Ajoutons que, ces triangles rectangles étant semblables entre eux, les côtés du premier ou les valeurs numériques de

$$\cos s, \quad \sin s, \quad 1$$

seront proportionnels aux côtés du second, c'est-à-dire aux valeurs numériques de

$$1, \quad \text{tang}\, s, \quad \text{séc}\, s,$$

et aux côtés du troisième, c'est-à-dire, aux valeurs numériques de

$$\cot s, \quad 1, \quad \text{coséc}\, s$$

Donc les valeurs numériques des lignes trigonométriques

$$\text{tang}\, s, \quad \text{séc}\, s, \quad \cot s, \quad \text{coséc}\, s$$

seront respectivement égales aux valeurs numériques des rapports

$$\frac{\sin s}{\cos s}, \quad \frac{1}{\cos s}, \quad \frac{\cos s}{\sin s}, \quad \frac{1}{\sin s};$$

et comme elles seront positives ou négatives en même temps que ces rapports, [voyez ci-dessus le tableau relatif aux signes], on aura nécessairement

(8) $$\text{tang}\, s = \frac{\sin s}{\cos s}, \quad \text{séc}\, s = \frac{1}{\cos s}, \quad \cot s = \frac{\cos s}{\sin s}, \quad \text{coséc}\, s = \frac{1}{\sin s}.$$

Enfin siv s et cosiv s, c'est-à-dire, le sinus verse et le cosinus verse de l'arc s seront évidemment déterminés par les formules

(9) $$\text{siv}\, s = 1 - \cos s, \qquad \text{cosiv}\, s = 1 - \sin s.$$

Donc toutes les lignes trigonométriques d'un arc a peuvent être facilement exprimées à l'aide du sinus et du cosinus de cet arc.

Les extrémités du cosinus et du sinus d'un arc étant précisément les projections de l'extrémité de l'arc 1.° sur le diamètre horizontal, 2.° sur le diamètre vertical, il est aisé de voir que les arcs

$$s \quad \text{et} \quad -s$$

ont le même cosinus, mais des sinus égaux et des signes contraires. Donc

(10) $$\cos(-s) = \cos s, \quad \sin(-s) = -\sin s.$$

On trouvera de même

(11) $$\cos(\pi + s) = -\cos s, \quad \sin(\pi + s) = -\sin s,$$

et généralement, en désignant par $2k + 1$ un nombre impair quelconque,

(12) $$\cos[s \pm (2k + 1)\pi] = -\cos s, \quad \sin[s \pm (2k + 1)\pi] = -\sin s.$$

On aurait au contraire, en désignant par $2k$ un nombre pair,

(13) $$\cos(s \pm 2k\pi) = \cos s, \quad \sin(s \pm 2k\pi) = \sin s.$$

Enfin si l'on remplace s par $-s$ dans les formules (11) et dans les suivantes

(14) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)=\sin s, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-s\right)=\cos s,$$

on en tirera

(15) $$\cos(\pi-s)=-\cos s, \qquad \sin(\pi-s)=\sin s,$$

et

(16) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+s\right)=-\sin s, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+s\right)=\cos s.$$

On pourra donc exprimer en fonction de $\sin s$ et de $\cos s$ les sinus et cosinus des arcs

$$-s, \quad \frac{\pi}{2}\pm s, \quad \pi\pm s, \quad s\pm 2k\pi, \quad s\pm(2k+1)\pi,$$

et même leurs autres lignes trigonométriques dont les valeurs se déduiront aisément des formules (8), (9) combinées avec les équations (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16).

Observons encore que, s étant un arc quelconque, le rapport $\frac{s}{\pi}$ sera nécessairement compris entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$\ldots\ldots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens. Soit m le terme le plus voisin du rapport $\frac{s}{\pi}$, m désignant une quantité entière positive ou négative. On aura

(17) $$\frac{s}{\pi}=m\pm\theta,$$

θ représentant un nombre inférieur ou tout au plus égal à $\frac{1}{2}$; puis, en posant pour abréger

$$\pm\theta\pi=\alpha,$$

on tirera de l'équation (17)

(18) $$s=m\pi+\alpha,$$

α désignant un arc positif ou négatif, mais renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. Cela posé, les formules (12) et (13) donneront

(19) $$\cos s=\cos\alpha, \qquad \sin s=\sin\alpha$$

si la valeur numérique de m est paire, et

$$(20) \qquad \cos s = -\cos \alpha, \qquad \sin s = -\sin \alpha,$$

si la valeur numérique de m est impaire.

Concevons maintenant que α, β représentent les deux angles aigus d'un triangle rectangle. Ces angles étant compléments l'un de l'autre, α, β seront deux quantités positives inférieures à $\frac{\pi}{2}$, et liées entre elles par l'équation

$$(21) \qquad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Soient d'ailleurs a le côté opposé à l'angle α, b le côté opposé à l'angle β, et c l'hypothénuse. Le triangle dont il s'agit sera semblable à tous ceux qui offriront les mêmes angles, par conséquent à celui, qui, dans le cercle décrit avec un rayon équivalent à l'unité, aurait pour premier côté le cosinus de l'arc α, et pour hypothénuse le rayon mené à l'extrémité de cet arc, le second côté étant alors égal à $\sin \alpha$. Donc les côtés

$$a, \quad b, \quad c$$

du premier triangle seront proportionnels aux côtés homologues du second, c'est-à-dire aux trois quantités

$$\sin \alpha = \cos \beta, \qquad \cos \alpha = \sin \beta, \qquad 1,$$

en sorte qu'on aura

$$(22) \qquad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha} = c.$$

Lorsque des cinq quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad a, \quad b, \quad c$$

deux sont données, on peut aisément à l'aide des formules (21), (22) déterminer les trois autres, pourvu que les quantités données ne soient pas les deux angles α, β. En effet, si l'on donne un des angles α, β, l'autre se déduira immédiatement de l'équation (21). Donc alors l'angle α sera connu, et si l'on donne en outre une des trois longueurs a, b, c, la formule (22) fournira les valeurs des deux autres.

On trouvera en particulier, si a est connu,

$$(23) \qquad b = a \cot \alpha, \qquad c = a \operatorname{coséc} \alpha,$$

si b est connu,

$$(24) \qquad a = b \operatorname{tang} \alpha, \qquad c = b \operatorname{séc} \alpha,$$

et, si c est connu

(25) $$a = c \sin \alpha, \qquad b = c \cos \alpha.$$

Si l'on donnait deux des trois longueurs a, b, c, on déterminerait immédiatement l'angle α par l'une des trois équations

(26) $$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tang \alpha = \frac{a}{b},$$

puis on obtiendrait la troisième longueur en opérant comme dans la première hypothèse.

Deux droites tracées arbitrairement dans l'espace sont censées former entre elles les mêmes angles que formeraient deux autres droites parallèles aux premières et passant par un même point. Cela posé, étant données deux droites, situées ou non dans un même plan, qui comprennent entre elles l'angle aigu α, et une longueur c mesurée sur la première droite, si l'on projette orthogonalement cette longueur 1.° sur la seconde droite, 2.° sur une troisième droite qui soit perpendiculaire à la seconde dans un plan mené par celle-ci parallèlement à la première, les deux projections se réduiront évidemment aux deux côtés a, b d'un triangle rectangle dans lequel l'hypothénuse égale à c formerait avec le côté b l'angle α. Par suite on déduira de la seconde des équations (24) jointe à la seconde des équations (25) le théorème que je vais énoncer.

1.er Théorème. *Une longueur c mesurée sur une droite est équivalente à sa projection sur un axe quelconque multipliée par la sécante de l'angle aigu α que cette droite forme avec l'axe. La projection elle-même équivaut à la longueur c multipliée par le cosinus de l'angle α.*

Considérons à présent, dans un cercle dont le rayon serait R et le diamètre

$$D = 2R,$$

l'arc compris entre deux rayons qui formeraient entre eux un angle double de l'angle aigu α. Cet arc sera représenté par 2α, si R se réduit à l'unité, par $2R\alpha$ dans le cas contraire ; et, si l'on nomme a la corde de ce même arc, $\frac{1}{2}a$ sera le côté opposé à l'angle α dans le triangle rectangle qui aura pour hypothénuse l'un des rayons ci-dessus mentionnés. Cela posé, on tirera de la première des formules (25), en y remplaçant a par $\frac{1}{2}a$, et c par R,

(27) $$\frac{1}{2}a = R \sin \alpha, \qquad a = 2R \sin \alpha = D \sin \alpha,$$

par conséquent

$$\frac{a}{\sin \alpha} = D.$$

D'ailleurs les deux portions de la circonférence situées de part et d'autre de la corde a seront évidemment des segments capables des angles α, $\pi-\alpha$ qui offrent le même sinus On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.[e] Théorême. *Dans un cercle quelconque le rapport qui existe entre la corde d'un arc et le sinus de tout angle inscrit dont les côtés comprennent entre eux ce même arc, équivaut au diamètre.*

Soient maintenant a, b, c les trois côtés d'un triangle quelconque, et α, β, γ les angles opposés à ces côtés. Les quantités, α, β, γ, toutes trois positives et inférieures à π seront liées entre elles par l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi. \tag{28}$$

De plus, si l'on nomme D le diamètre du cercle circonscrit au triangle, on aura, en vertu du 2.[e] théorême,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=D. \tag{29}$$

Enfin, si, en prenant le côté c pour base du triangle, on nomme h sa hauteur, a, b deviendront les hypothénuses de deux triangles rectangles qui auront pour côté commun la hauteur h; les angles opposés à ce côté commun étant respectivement l'angle β ou son supplément $\pi-\beta$ et l'angle α ou son supplément $\pi-\alpha$. Donc, en ayant égard aux formules

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \sin(\pi-\beta)=\sin\beta$$

on trouvera, dans tous les cas,

$$h=a\sin\beta=\beta\sin\alpha. \tag{30}$$

Ajoutons que la base c du triangle donné sera évidemment égale à la somme des côtés non communs des triangles rectangles, si les deux angles α, β sont aigus, et à la différence des mêmes côtés, si l'un de ces angles, α, par exemple, devient obtus; d'où il suit qu'on aura dans le premier cas

$$c=a\cos\beta+b\cos\alpha, \tag{31}$$

et dans le second cas

$$c=a\cos\beta-b\cos(\pi-\alpha).$$

Or, en combinant la dernière formule avec l'équation

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

on retrouve précisément la formule (31), qui est ainsi démontrée, lors même qu'un des angles α, β cesse d'être aigu.

Lorsqu'on pose $\gamma = \frac{\pi}{2}$, les formules (28) et (29) se réduisent, comme on devait s'y attendre, aux formules (21) et (22). Observons encore que la formule (30) entraîne évidemment l'égalité des rapports

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{b}{\sin \beta},$$

et s'accorde ainsi avec la formule (29).

Lorsque, dans un triangle, on donne trois des six éléments

$$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$$

on peut aisément déterminer les trois autres, à l'aide des formules (28), (29), (30), (31), pourvu que les éléments donnés ne soient pas les trois angles α, β, γ. Dans cette dernière hypothèse on ne pourrait évidemment déterminer que les rapports existants entre les côtés. Mais, si l'on donne un côté a avec deux angles, après avoir calculé le troisième angle à l'aide de la formule (28), on connaîtra certainement a et α, par conséquent

$$D = \frac{a}{\sin \alpha}, \tag{32}$$

par le moyen de la formule (29) de laquelle on tirera

$$b = D \sin \beta, \quad c = D \sin \gamma. \tag{33}$$

Si l'on donne deux côtés, b, c, avec l'angle β opposé à l'un d'eux, on connaîtra encore

$$D = \frac{b}{\sin \beta}, \tag{34}$$

puis on obtiendra successivement γ, α et a par le moyen des formules (29) et (28), desquelles on tirera

$$\sin \gamma = \frac{c}{D}, \quad \alpha = \pi - (\beta + \gamma), \quad a = D \sin \alpha. \tag{35}$$

Si l'on donne deux côtés b et c avec l'angle compris α, alors, pour déterminer a et β, on aura les formules (30) et (31), ou

(36) $$\left\{\begin{aligned} a \sin\beta &= b \sin\alpha, \\ a \cos\beta &= c - b\cos\alpha, \end{aligned}\right.$$

avec la suivante

(37) $$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1;$$

et l'on en conclura 1.° en éliminant a

(38) $$\cot\beta = \frac{c}{b}\cot\alpha - 1,$$

2.° en éliminant β

(39) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

D'ailleurs, β étant connu, on pourra calculer γ et a comme dans le cas précédent. Enfin, si l'on donne les trois côtés a, b, c, on déterminera l'angle α par le moyen de l'équation (39) de laquelle on tire

(40) $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

puis D, β et γ par le moyen de la formule (32) jointe à celles-ci

(41) $$\sin\beta = \frac{b}{D}, \quad \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$$

Lorsque dans la formule (31) on substitue les valeurs de a, b, c tirées de la formule (29), savoir

$$a = D\sin\alpha, \qquad b = D\sin\beta, \qquad c = D\sin\gamma,$$

on en conclut

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

En combinant cette dernière avec la formule (28) de laquelle on tire

$$\sin\gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta),$$

on trouvera

(42) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

La formule (42) se trouve ainsi démontrée dans le cas où α, β sont deux quantités positives propres à représenter deux angles d'un triangle quelconque, c'est-à-dire, deux

quantités positives, dont la somme ne surpasse pas le nombre π. Elle subsistera donc, si α et β sont deux angles aigus; et de plus, si, α, β étant deux angles aigus, on remplace dans l'équation (42) α par $\pi-\alpha$, la formule ainsi obtenue, savoir,

$$\sin(\pi-\alpha+\beta)=\sin(\pi-\alpha)\cos\beta+\sin\beta\cos(\pi-\alpha)$$

ou

(43) $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha .$$

subsistera certainement dans le cas où $\pi-\alpha+\beta$ sera inférieur à π, c'est-à-dire dans le cas où l'on aura

$$\alpha>\beta .$$

D'ailleurs, en ayant égard aux équations

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha;\quad \sin(-\beta)=-\sin\beta,\quad \cos(-\beta)=\cos\beta,$$

$$\sin(-\alpha-\beta)=-\sin(\alpha+\beta),$$

$$\sin(-\alpha+\beta)=-\sin(\alpha-\beta),$$

on reconnaîtra sans peine 1.° que pour obtenir l'équation (43) il suffit de remplacer dans l'équation (42) β par $-\beta$, 2.° qu'on altère point les formules (42) et (43) quand on y remplace simultanément α par $-\alpha$ et β par $-\beta$. Donc la formule (42) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de α et de β renfermées entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Soient maintenant x, y deux arcs quelconques positifs ou négatifs. D'après ce qui a été dit plus haut, on aura

(44) $$x=m\pi+\alpha,\qquad y=n\pi+\beta$$

m, n désignant deux quantités entières positives ou négatives, et α, β deux quantités comprises entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Cela posé, pour passer de l'équation (42) à la suivante

(45) $$\sin(x+\beta)=\sin x\cos\beta+\sin\beta\cos x,$$

il suffira d'observer que l'on a

$$\sin(m\pi+\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta),\quad \sin(m\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(m\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$

quand m est paire, et

$$\sin(m\pi+\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta), \quad \sin(m\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(m\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

quand m est impaire. Par la même raison, de la formule (45) on déduira immédiatement celle-ci

$$(46) \qquad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x.$$

Si dans cette dernière on remplace y par $-y$, elle donnera

$$(47) \qquad \sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x.$$

Enfin, si dans les formules (46) et (47) on remplace x par $\frac{\pi}{2}-x$, on en tirera

$$(48) \qquad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,$$

$$(49) \qquad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

Les formules (47), (48), (49) subsistent, comme la formule (46), pour des valeurs quelconques positives ou négatives des arcs x et y.

Les formules (46), (49) pouvant s'écrire comme il suit

$$\sin(x+y)=(\tang x+\tang y)\cos x\cos y$$

$$\cos(x+y)=(1-\tang x\tang y)\cos x\cos y$$

on en conclut, en divisant la première par la seconde

$$(50) \qquad \tang(x+y)=\frac{\tang x+\tang y}{1-\tang x\tang y},$$

puis, en remplaçant y par $-y$,

$$(51) \qquad \tang(x-y)=\frac{\tang x-\tang y}{1+\tang x\tang y}.$$

De plus, si dans les formules (46), (49), (50) on pose $y = x$, elles donneront

(52) $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

(53) $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

(54) $$\operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x}.$$

On tire encore des formules (46), (47), (48), (49)

(55) $$\left\{\begin{array}{l} \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y, \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x, \\ \cos(x+y) + \cos(x+y) = 2 \cos x \cos y, \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y\,; \end{array}\right.$$

puis, en posant

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2},$$

on en conclut

(56) $$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}, \quad \frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-q) . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p+q), \text{ etc...}$$

En combinant la première des équations (56) avec la formule (29), on trouvera

(57) $$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = \frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma} = \frac{b-c}{b+c}.$$

Or, de cette dernière jointe à l'équation (28), on déduira les suivantes

(58) $$\left\{\begin{array}{l} \beta+\gamma=\pi-\alpha, \\ \operatorname{tang}\dfrac{\beta-\gamma}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{\alpha}{2}, \end{array}\right.$$

à l'aide desquelles on peut dans un triangle déterminer immédiatement les angles β et γ, quand on connait l'angle α et les côtés qui le comprennent.

Les formules (52) et (53) donnent

(59) $$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

(60) $$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

En combinant la formule (60) avec l'équation (39), on trouve

(61) $$a^2=(b+c)^2-2bc\cos^2\frac{\alpha}{2}=(b-c)^2+2bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

puis, en observant que dans un triangle quelconque l'on a

$$0<\alpha<\pi, \qquad 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2},$$

et qu'en conséquence

$$\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2}$$

doivent être positifs, on tire des formules (61) et (59)

(62) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(63) $$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(64) $$\sin\alpha=\frac{[(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)]^{\frac{1}{2}}}{2bc}.$$

Chacune des formules (62), (63), (64) peut être substituée avec avantage à la formule (40), quand il s'agit de déterminer les angles d'un triangle dont on connait les trois côtés a, b. c. Si d'ailleurs on nomme h la hauteur du triangle, le côté c étant pris pour base, la surface $\frac{1}{2}ch$ sera, en vertu de la formule (30), égale à

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha\,,$$

et, en vertu de la formule (64), à

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}\,,$$

s représentant le demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$.

Tant que l'arc α reste positif et inférieur à π, alors $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ étant nécessairement positifs, on tire de la formule (60)

$$(65)\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,,\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.$$

A l'aide de ces dernières équations réunies à la formule $\cos\pi=-1$, on déterminera sans peine les sinus et cosinus des arcs représentés par le troisième, le quatrième ..... termes de la progression géométrique

$$(66)\qquad 2\pi,\quad \pi,\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{8},\quad \text{etc.....}$$

En y joignant les sinus et cosinus des arcs π et 2π, on trouvera

$$(67)\left\{\begin{array}{l}\cos 2\pi=1,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \text{etc...}\\ \sin 2\pi=0,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\quad \text{etc...}\end{array}\right.$$

On aura par suite

$$(68)\quad \text{tang}\,2\pi=0,\ \text{tang}\,\pi=0,\ \text{tang}\,\frac{\pi}{2}=\frac{1}{0},\ \text{tang}\,\frac{\pi}{4}=1,\ \text{tang}\,\frac{\pi}{8}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{etc.}$$

$$(69)\quad \text{séc}\,2\pi=1,\ \text{séc}\,\pi=-1,\ \text{séc}\,\frac{\pi}{2}=\frac{1}{0},\ \text{séc}\,\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},\ \text{séc}\,\frac{\pi}{8}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,,\ \text{etc...}$$

On peut encore déterminer facilement les sinus et cosinus des arcs compris dans la progression géométrique

(70) $$\frac{2\pi}{3},\quad \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{12},\quad \text{etc....};$$

et d'abord, comme dans un triangle l'égalité des trois côtés a, b, c entraine l'égalité des trois angles α, β, γ, on conclura de la formule (28) que $\frac{\pi}{3}$ représente un quelconque des angles d'un triangle équilatéral. Cela posé, on tirera des formules (40), (64), en y faisant $a = b = c$,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

et de ces dernières réunies aux équations (52), (53), (65) on déduira le système des formules

(71) $$\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\quad \text{etc.....} \\ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\quad \text{etc.....} \end{array}\right.$$

On aura par suite

(72) $$\operatorname{tang}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3},\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\quad \text{etc.....}$$

(73) $$\text{séc}\frac{2\pi}{3} = -2,\quad \text{séc}\frac{\pi}{3} = 2,\quad \text{séc}\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}},\quad \text{séc}\frac{\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\quad \text{etc.....}$$

Au reste on peut établir directement la formule

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

en observant que l'arc $\frac{\pi}{3}$ a pour complément $\frac{\pi}{6}$, pour snpplément $\frac{2\pi}{3}$, et que $2\sin\frac{\pi}{6}$ représente le côté de l'hexagone inscrit au cercle dont le rayon est l'unité.

Observons encore que, si l'arc 2α est renfermé entre les limites $0, \pi$, cet arc, dans le cercle qui a pour rayon l'unité, sera nécessairement plus grand que sa corde $2\sin\alpha$,

et plus petit que la somme $2 \tang \alpha$ des deux tangentes menées par ses extrémités et prolongées jusqu'à leur rencontre mutuelle. On aura donc alors

$$2 \sin \alpha < 2\alpha < 2 \tang \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

puis on en conclura

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

ou, ce qui revient au même,

(74) $$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha .$$

Cette dernière formule, n'étant point altérée quand on y remplace α par $-\alpha$, subsistera certainement pour toutes les valeurs de α comprises entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'elle s'étend à toutes les valeurs de α renfermées entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

Si maintenant on suppose que la valeur numérique de α diminue et s'approche indéfiniment de la limite zéro, on aura

(75) $$\lim \cos \alpha = 1 .$$

Par suite la formule (74) donnera

(76) $$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

et de cette dernière combinée avec l'équation (75) on tirera encore

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha \cos \alpha} = 1 ,$$

ou, ce qui revient au même,

(77) $$\lim \frac{\tang \alpha}{\alpha} = 1 .$$

§ 13. *Des expressions imaginaires et de leurs modules.*

En analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies sont inexactes, ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence. C'est ce qu'on a déjà vu dans le § 4 où la formule (41) fournit une valeur symbolique très-simple de l'inconnue x assujétie à vérifier les équations (39). Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires. Nous allons montrer comment l'on peut être conduit à en faire usage.

D'après ce qu'on a vu dans le § précédent, le sinus et le cosinus de l'arc $x+y$ sont donnés en fonction des sinus et cosinus des arcs x et y par le moyen des formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x. \end{cases}$$

Or, sans prendre la peine de retenir ces formules, on a un moyen fort simple de les retrouver à volonté. Il suffit en effet d'avoir égard à la remarque suivante.

Supposons que l'on multiplie l'une pour l'autre les deux expressions symboliques

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

$$\cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

en opérant d'après les règles connues de la multiplication algébrique, comme si $\sqrt{-1}$ était une quantité réelle dont le carré fût égal à -1. Le produit obtenu se composera de deux parties l'une toute réelle, l'autre ayant pour facteur $\sqrt{-1}$; et la partie réelle fournira la valeur de $\cos(x+y)$ tandisque le coefficient de $\sqrt{-1}$ fournira la valeur de $\sin(x+y)$. Pour constater cette remarque, on écrit la formule,

$$(2)\qquad \cos(x+y)+\sqrt{-1}\sin(x+y) = (\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y).$$

Les trois expressions que renferme l'équation précédente, savoir,

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x, \quad \cos y + \sqrt{-1}\sin y, \quad \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

sont trois expressions symboliques qui ne peuvent s'interpréter d'après les conventions généralement établies, et ne représentent rien de réel. On les a nommées pour cette raison expressions imaginaires. L'équation (2) elle-même, prise à la lettre, se trouve inexacte et n'a pas de sens. Pour en tirer des résultats exacts, il faut, en premier lieu, développer son second membre par la multiplication algébrique, ce qui réduit cette équation à

$$(3)\quad \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y + (\sin x\cos y + \sin y\cos x)\sqrt{-1}.$$

Il faut, en second lieu, dans l'équation (3) égaler la partie réelle du premier membre à la partie réelle du second, puis le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le premier membre au coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le second. On est ainsi ramené aux équations (1), que l'on doit considérer comme implicitement renfermées l'une et l'autre dans la formule (2).

En général on appelle *expression imaginaire* toute expression symbolique de la forme

$$a + b\sqrt{-1},$$

a, b désignant deux quantités réelles, et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$a + b\sqrt{-1}, \qquad c + d\sqrt{-1}$$

sont égales entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre 1.° entre les parties réelles a et c, 2.° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir b et d. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles par le signe $=$, et il en résulte ce qu'on appelle une *équation imaginaire*. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique.

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$a = c, \qquad b = d.$$

Lorsque dans l'expression imaginaire

$$a + b\sqrt{-1}$$

le coefficient b de $\sqrt{-1}$ s'évanouit, le terme $b\sqrt{-1}$ est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle a. En vertu de cette convention les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être soumises aussi bien que les quantités réelles aux diverses opérations de l'algèbre. Si l'on effectue en particulier l'addition, la soustraction ou la multiplication d'une ou de plusieurs expressions imaginaires, en opérant d'après les règles établies pour les quantités réelles, on obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire qui sera ce qu'on appelle la *somme*, la *différence* ou le *produit* des expressions données. Par exemple, si l'on donne seulement deux expressions imaginaires $a+b\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$, on trouvera

(4) $$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=a+c+(b+d)\sqrt{-1},$$

(5) $$(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=a-c+(b-d)\sqrt{-1},$$

(6) $$(a+b\sqrt{-1})\ (c+d\sqrt{-1})=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

Il est bon de remarquer que le produit de deux ou plusieurs expressions imaginaires, comme celui de deux ou plusieurs binomes réels restera le même, dans quelque ordre qu'on multiplie ses différents facteurs.

Diviser une première expression imaginaire par une seconde, c'est trouver une troisième expression imaginaire qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. Le résultat de cette opération est le quotient des deux expressions données. On se sert pour l'indiquer du signe ordinaire de la division. Ainsi, par exemple,

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$$

représente le quotient des deux expressions imaginaires $a+b\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$.

Élever une expression imaginaire à la puissance du degré m, m désignant un nombre entier, c'est former le produit de m facteurs égaux à cette expression. On indique la puissance m^{me} de $a+b\sqrt{-1}$ par la notation

$$(a+b\sqrt{-1})^m.$$

On dit que, deux expressions imaginaires sont *conjuguées* l'une à l'autre, lorsque ces deux expressions ne diffèrent entre elles que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$. La somme de deux semblables expressions est toujours réelle ainsi que leur produit. En effet, les deux expressions imaginaires conjuguées

$$a+b\sqrt{-1}, \qquad a-b\sqrt{-1}$$

donnent pour somme $2a$, et pour produit a^2+b^2. La dernière partie de cette observation conduit à un théorême relatif aux nombres et dont voici l'énoncé.

1.er Théorême. *Si l'on multiplie l'un pour l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore une somme de deux carrés.*

Démonstration. Soient

$$a^2+b^2, \qquad c^2+d^2$$

les deux nombres entiers dont il s'agit, a^2, b^2, c^2, d^2 désignant des carrés parfaits. On aura évidemment les deux équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}, \\ (a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=ac-bd-(ad+bc)\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

et, en multipliant celles-ci, membre à membre, on obtiendra la suivante

$$(8)\qquad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Si l'on échange entre elles dans cette dernière les lettres a et b, on trouvera

$$(9)\qquad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Il y a donc en général deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres entiers dont chacun est la somme de deux carrés. Ainsi, par exemple, on tire des équations (8) et (9),

$$(2^2+1^2)(3^2+2^2)=4^2+7^2=1^2+8^2.$$

On voit par ces considérations que l'emploi des expressions imaginaires peut être d'une grande utilité, non seulement dans l'algèbre ordinaire, mais encore dans la théorie des nombres.

Quelque fois on représente une expression imaginaire par une seule lettre. C'est un artifice qui augmente les ressources de l'analyse et dont nous ferons souvent usage.

Une propriété remarquable de toute expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, c'est de pouvoir se mettre sous la forme

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

ρ désignant une quantité positive et θ un arc réel. En effet, si l'on pose l'équation symbolique

$$(10)\qquad a+b\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

ou, ce qui revient au même, les deux équations réelles

(11) $$a = \rho \cos \theta, \qquad b = \rho \sin \theta,$$

on tirera

$$a^2 + b^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2,$$

(12) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

et, après avoir ainsi déterminé la valeur du nombre ρ, il ne restera, pour vérifier complétement les équations (10), qu'à trouver un arc θ dont le cosinus et le sinus soient respectivement

(13) $$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or on tire des formules (13)

(14) $$\operatorname{tang} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}.$$

D'ailleurs si l'on désigne généralement par la notation

$$\operatorname{arctang} x$$

l'arc qui, ayant x pour tangente, offre la plus petite valeur numérique possible, et se trouve en conséquence renfermé entre les limites

$$-\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2}$$

on vérifiera la formule (14), en posant

(15) $$\theta = n\pi + \operatorname{arctang} \frac{b}{a},$$

n représentant une quantité entière positive ou négative. Enfin, comme tout arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ a un cosinus positif, on peut affirmer que l'arc θ déterminé par la formule (15) offrira un cosinus positif, si n est paire, c'est-à- dire, si l'on a

(16) $$\theta = \pm 2k\pi + \operatorname{arctang} \frac{b}{a},$$

k étant un nombre entier quelconque, et un cosinus négatif, si n est impaire, c'est-à-dire, si l'on a

$$(17) \qquad \theta = \pm(2k+1)\pi + \text{arctang}\,\frac{b}{a}.$$

Cela posé, de l'équation (14) présentée sous la forme

$$\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b},$$

on déduira immédiatement la formule

$$\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \,*$$

et par conséquent les équations (13), pourvu que l'on détermine θ par la formule (16), quand a sera positif, et par la formule (17) quand a sera négatif. Dans l'une et l'autre hypothèse le nombre entier k pouvant recevoir une infinité de valeurs, on obtiendra aussi une infinité de valeurs de θ propres à vérifier les formules (11), ou, ce qui revient au même, les formules (10).

---

* En général de la formule

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \dots\dots,$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, \dots\dots a, b, c, \dots\dots$ représentent des quantités quelconques, on tire

$$\frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = \dots\dots\dots\dots + \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots\dots}{a^2+b^2+c^2+\dots\dots},$$

et par suite

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \dots\dots\dots = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots\dots}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\dots\dots}}$$

le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$, quand la fraction $\frac{\alpha}{a}$ est positive, et au signe $-$ dans le cas contraire.

En résumé, si l'on pose

(18) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \zeta = \text{arctang}\,\frac{b}{a}\,,$$

et, si l'on désigne par k un nombre entier quelconque, on aura, dans le cas où a sera positif

(19) $$a + b\sqrt{-1} = \rho\left[\cos(\zeta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}\sin(\zeta \pm 2k\pi)\right],$$

par conséquent

(20) $$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)(\cos 2k\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2k\pi),$$

et dans le cas où a deviendra négatif

(21) $$a + b\sqrt{-1} = \rho\left\{\cos[\zeta \pm (2k+1)\pi] + \sqrt{-1}\sin[\zeta \pm (2k+1)\pi]\right\},$$

par conséquent

(22) $$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)[\cos(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi].$$

Comme on a d'ailleurs

(23) $$\cos 2k\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2k\pi = 1$$

(24) $$\cos(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi = -1\,,$$

les formules (20), (22) donneront, si a est positif

(25) $$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)\,,$$

et si a est négatif

(26) $$a + b\sqrt{-1} = -\rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta).$$

Au reste il est facile de voir que la formule (19) coïncide avec l'équation (25), et la formule (21) avec l'équation (26).

Lorsque l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ se trouve remenée à la forme

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\,,$$

la quantité positive ρ est ce qu'on appelle le *module* de cette expression imaginaire. Comme des quantités a, b supposées connues on ne déduit pour le module ρ qu'une valeur unique déterminée par la formule (12), on peut évidemment énoncer la proposition suivante.

2.ᵉ Théorème. *L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne toujours l'égalité de leurs modules.*

Il suit encore de la formule (12) que deux expressions imaginaires conjuguées

$$a + b\sqrt{-1}\,, \qquad a - b\sqrt{-1}$$

ont pour module commun la racine carrée de leur produit.

Lorsque, b étant nul, l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ se réduit à la quantité réelle a, la formule (12) donne simplement

$$\rho = \sqrt{a^2}\,.$$

Ainsi le module d'une quantité réelle a se réduit à sa valeur numérique $\sqrt{a^2}$.

Toute expression imaginaire, qui a zéro pour module, se réduit elle-même à zéro, et réciproquement comme le sinus et le cosinus d'un arc ne deviennent jamais nul en même temps, il en résulte qu'une expression imaginaire ne peut se réduire à zéro qu'autant que son module s'évanouit.

Observons enfin que les définitions données dans le § 3 des variables infiniment petites et infiniment grandes, des fonctions continues ou discontinues, explicites ou implicites, entières ou fractionnaires, etc..... doivent être étendues au cas même où les variables et les fonctions dont il s'agit deviennent imaginaires.

Toute expression imaginaire dont le module se réduit à l'unité, étant de la forme

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x\,,$$

on effectuera sans peine la multiplication, la division ou l'élévation à des puissances entières d'une ou plusieurs expressions imaginaires qui auraient l'unité pour module. En effet de la formule (2) on déduit immédiatement la suivante

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\,\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \cos(x + y + z + \ldots\ldots) + \sqrt{-1}\sin(x + y + z + \ldots\ldots)\,. \end{array} \right.$$

quelque soit le nombre m des variables x, y, z, ... De plus on tirera de la formule (2), en y remplaçant x par $x - y$

$$[\cos(x - y) + \sqrt{-1}\sin(x - y)](\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos x \sqrt{-1}\sin x\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(28)\qquad \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos y + \sqrt{-1}\sin y} = \cos(x - y) + \sqrt{-1}\sin(x - y)\,,$$

et de la formule (27), en posant

$$x = y = z = \ldots ,$$

(29) $$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx .$$

Cela posé il deviendra facile d'effectuer la multiplication, la division ou l'élevation à des puissances entières d'une ou de plusieurs expressions imaginaires dont les modules ne se réduiraient pas à l'unité. Car, si l'on pose

$$a + b\sqrt{-1} = \rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

$$a' + b'\sqrt{-1} = \rho'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'),$$

$$a'' + b''\sqrt{-1} = \rho''(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta''),$$

etc.....

ρ, ρ', ρ'' ..... étant des quantités positives, et θ, θ', θ'' ..... des arcs réels, on aura évidemment

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1})(a'' + b''\sqrt{-1}) \ldots\ldots$$

$$= \rho\rho'\rho'' \ldots\ldots (\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta')(\cos\theta'' + \sqrt{-1}\sin\theta'') \ldots ,$$

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta}{\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'},$$

$$(a + b\sqrt{-1})^m = \rho^m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m,$$

puis on en conclura, en ayant égard aux formules (27), (28), (29),

(30) $$\left\{\begin{aligned} &(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1})(a'' + b''\sqrt{-1}) \ldots\ldots \\ &= \rho\rho'\rho'' \ldots\ldots [\cos(\theta + \theta' + \theta'' + \ldots\ldots) + \sqrt{-1}\sin(\theta + \theta' + \theta'' + \ldots\ldots)], \end{aligned}\right.$$

(31) $$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta - \theta') + \sqrt{-1}\sin(\theta - \theta')]$$

(32) $$(a + b\sqrt{-1})^m = \rho^m[\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta].$$

De ces dernières équations on déduit immédiatement la proposition suivante.

3.° Théorème. *Le produit, le quotient et les diverses puissances entières d'une ou de plusieurs expressions imaginaires ont pour modules le produit, le quotient et les diverses puissances de leurs modules.*

On peut encore démontrer facilement cet autre théorème.

4.° Théorème. *La somme de deux expressions imaginaires offre, ainsi que leur différence, un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Démonstration. En effet soient

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \qquad a' + b'\sqrt{-1} = (\rho'\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta')$$

deux expressions imaginaires qui aient pour modules ρ et ρ' la somme et la différence de ces deux expressions, savoir,

$$(\rho\cos\theta + \rho'\cos\theta') + (\rho\sin\theta + \rho'\sin\theta')\sqrt{-1},$$

et

$$(\rho\cos\theta - \rho'\cos\theta') + (\rho\sin\theta - \rho'\sin\theta')\sqrt{-1}$$

auront pour modules deux quantités positives dont les carrés seront respectivement

(33) $$(\rho\cos\theta + \rho'\cos\theta')^2 + (\rho\sin\theta + \rho'\sin\theta')^2 = \rho^2 + 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2$$

et

(34) $$(\rho\cos\theta - \rho'\cos\theta')^2 + (\rho\sin\theta - \rho'\sin\theta')^2 = \rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2.$$

D'ailleurs $\cos(\theta - \theta')$ étant renfermés entre les limites -1, $+1$, chacune des quantités (33), (34) sera comprise entre les limites

$$\rho^2 + 2\rho\rho' + \rho'^2 = (\rho + \rho')^2,$$

$$\rho^2 - 2\rho\rho' + \rho'^2 = (\rho - \rho')^2 = (\rho' - \rho)^2,$$

et sa racine carrée entre la somme $\rho + \rho'$ et la valeur numérique de la différence $\rho - \rho'$, ce qui suffit pour la démonstration du théorème 4.

Corollaire. La somme de plusieurs expressions imaginaires offre un module inférieur à la somme de leurs modules.

§. 14. *Des séries imaginaires.*

Soient respectivement

(1) $$v_0\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\ \ldots\ldots\ v_n\,,\ \text{etc.}\ldots$$

(2) $$w_0\,,\ w_1\,,\ w_2\,,\ \ldots\ldots\ w_n\,,\ \text{etc.}\ldots$$

deux séries réelles ; et posons

$$u_0 = v_0 + w_0\sqrt{-1}\,,\qquad u_1 = v_1 + w_1\sqrt{-1}\,,\qquad u_2 = v_2 + w_2\sqrt{-1}\,,\ \text{etc.}$$

en sorte qu'on ait généralement

$$u_n = v_n + w_n\sqrt{-1}\,.$$

La suite des expressions imaginaires

(3) $$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\ldots,\ u_n\,,\ \text{etc.}$$

formera ce qu'on appelle une série imaginaire. Soit

(4) $$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$
$$= v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1} + (w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{n-1})\sqrt{-1}$$

la somme des n premiers termes de cette série. Selon que, pour des valeurs croissantes de n, s_n convergera, ou non, vers une limite fixe s, on dira que la série (3) est convergente, et qu'elle a pour somme cette limite, ou bien qu'elle est divergente, et n'a pas de somme. Le premier cas aura évidemment lieu, si les deux sommes réelles

$$v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$$

$$w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{n-1}$$

convergent elles-mêmes, pour des valeurs croissantes de n vers des limites fixes, et le second cas dans la supposition contraire. En d'autres termes, la série (3) sera toujours convergente en même temps que les séries réelles (1) et (2). Si ces dernières, ou l'une d'elles seulement, deviennent divergentes, la série (3) le sera pareillement.

Si, dans le cas où la série est convergente, on pose

(5) $$s = s_n + r_n,$$

r_n sera ce qu'on appelle le reste de la série prolongée jusqu'au n^{me}. Dans tous les cas possibles, le terme de la série qui correspond à l'indice n, savoir,

$$u_n = v_n + w_n \sqrt{-1}$$

est ce qu'on nomme son terme général. Soit ρ_n le module de ce terme, en sorte qu'on ait

(6) $$v_n + w_n \sqrt{-1} = \rho_n (\cos \theta_n + \sqrt{-1} \sin \theta_n),$$

ρ_n désignant une quantité positive et θ_n un arc réel. Les séries (1), (2), (3) deviendront respectivement

(7) $$\rho_0 \cos \theta_0, \quad \rho_1 \cos \theta_1, \quad \rho_2 \cos \theta_2, \quad \text{etc.....}$$

(8) $$\rho_0 \sin \theta_0, \quad \rho_1 \sin \theta_1, \quad \rho_2 \sin \theta_2, \quad \text{etc.....}$$

(9) $$\rho_0 (\cos \theta_0 + \sqrt{-1} \sin \theta_0), \quad \rho_1 (\cos \theta_1 + \sqrt{-1} \sin \theta_1), \quad \rho_2 (\cos \theta_2 + \sqrt{-1} \sin \theta_2), \quad \text{etc....;}$$

et, comme la valeur numérique du sinus ou du cosinus d'un arc réel ne saurait surpasser l'unité, il est clair que, si les modules

(10) $$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \text{etc.....}$$

formeront une série convergente, les séries (7), (8) par conséquent la série (9) seront elles-mêmes convergentes. On peut donc énoncer ce théorème.

1.er Théorème. *Pour qu'une série imaginaire soit convergente il suffit que les modules de ses différents termes forment une série réelle convergente.*

On prouvera encore facilement que, pour étendre les théorèmes 1, 2, 4, 5, 6, 7 du § 6 au cas où la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots\ldots \quad u_n, \quad \text{etc.....}$$

devient imaginaire, il suffit de substituer, dans ces théorèmes, les modules des termes à leurs valeurs numériques. Ainsi, en particulier, on établira sans peine la proposition suivante.

2.e Théorème. *Soit Ω la limite ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, tandisque n croît indéfiniment, la racine n^{me} du module ρ_n de u_n; ou bien encore une limite fixe vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de n, le rapport*

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}.$$

La série (3) *sera convergente, si l'on a* $\Omega < 1$, *et divergente, si l'on a* $\Omega > 1$.

Démonstration. En effet, si l'on a $\Omega < 1$, la série (10) étant convergente, la série (3) le sera elle-même, en vertu du théorème 1.er; et si l'on a $\Omega > 1$, les plus grandes valeurs du module

$$(11) \qquad \rho_n = (v_n^2 + w_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

croîtront avec n au-de-là de toute limite; ce qui ne peut arriver qu'autant que les plus grandes valeurs numériques des deux quantités

$$v_n, \quad w_n$$

ou au moins de l'une d'entre elles croissent de même indéfiniment. Donc, si l'on a $\Omega > 1$, l'une au moins des séries (1), (2) sera divergente, ce qui entraînera la divergence de la série (3).

Considérons à présent une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable x, savoir,

$$(12) \qquad a_0, \; a_1 x, \; a_2 x^2, \text{ etc.....}$$

Pour étendre les théorèmes 8, 9, 10 du § 6 au cas où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant imaginaires, la variable x est elle-même imaginaire ou de la forme.

$$(13) \qquad x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

r désignant une quantité positive et t un arc réel, il suffira évidemment de substituer, dans ces théorèmes, les modules de x, de a_n, de a_{n+1}, etc..... à leurs valeurs numériques. Ainsi, en particulier, on déduira immédiatement du 2.e théorème la proposition suivante.

3.e Théorème. *Si, ρ_n étant le module de a_n, ϖ désigne la limite ou la plus grande des limites de $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, ou bien encore une limite fixe vers laquelle converge, tandisque n croît indéfiniment le rapport*

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n},$$

la série (12) *restera convergente, tant que le module r de x sera inférieur à* $\frac{1}{\omega}$, *et deviendra divergente lorsqu'on aura* $r > \frac{1}{\omega}$.

L'une des séries imaginaires les plus simples est celle qu'on obtient en supposant que dans la progression géométrique

$$1, \; x, \; x^2, \; \ldots\ldots \; x^n, \; \text{etc.}\ldots\ldots \tag{14}$$

la variable x soit imaginaire et déterminée par l'équation (13). Si l'on nomme s_n la somme des n premiers termes de cette progression, on trouvera, comme dans le § 6,

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}. \tag{15}$$

D'ailleurs le module de x^n étant la n^{me} puissance du module r de x, ce module et par suite celui du rapport

$$\frac{x^n}{1-x}$$

deviendront infiniment petits ou infiniment grands, pour des valeurs infiniment grandes de n, suivant que l'on aura $r<1$ ou $r>1$. Donc, si l'on a $r<1$, s_n s'approchera indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, de la limite s déterminée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x},$$

et la progression (14) étant convergente offrira pour somme $\frac{1}{1-x}$, en sorte qu'on aura

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x}. \tag{16}$$

Mais, si le module r de x devient supérieur à l'unité, la série (14) sera divergente et n'aura plus de somme. Il résulte effectivement du théorème 3 que la série (14) sera convergente quand on aura $r<1$, et divergente quand on aura $r>1$.

Si l'on posait

$$x = z\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t), \tag{17}$$

z désignant une quantité positive ou négative, et t un arc réel, le module de x ne serait autre chose que la valeur numérique de z, et l'équation (16) donnerait, pour des valeurs numériques de z inférieures à l'unité

$$(18)\quad 1+z(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)+z^2(\cos 2t+\sqrt{-1}\sin 2t)+\ldots\ldots=\frac{1}{1-z\cos t-z\sin t\sqrt{-1}}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$(1-z\cos t-z\sin t\sqrt{-1})(1-z\cos t+z\sin t\sqrt{-1})=(1-z\cos t)^2+(z\sin t)^2=1-2z\cos t+z^2,$$

et par suite

$$\frac{1}{1-z\cos t-z\sin t\sqrt{-1}}=\frac{1-z\cos t+z\sin t\sqrt{-1}}{1-2z\cos t+z^2},$$

la formule (18) pourra s'écrire comme il suit

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &1+z\cos t+z^2\cos 2t+\ldots+(z\sin t+z^2\sin 2t+\ldots)\sqrt{-1}\\ &=\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2}+\frac{z\sin t}{1-2z\cos t+z^2}\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

et comprendra les deux équations réelles

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} 1+z\cos t+z^2\cos 2t+\text{etc.}&=\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2},\\ z\sin t+z^2\sin 2t+\text{etc.}&=\frac{z\sin t}{1-2z\cos t+z^2},\end{aligned}\right.$$

qui subsisteront, ainsi qu'elle, pour des valeurs de z comprises entre les limites

$$(21)\qquad z=-1,\qquad z=1.$$

En appliquant le 3.e théorème aux deux séries

$$(22)\qquad x,\quad -\frac{x^2}{2},\quad \frac{x^3}{3},\quad \text{etc.....}$$

$$(23)\qquad 1,\quad \mu x,\quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3,\quad \text{etc.....}$$

qui, pour des valeurs réelles de x renfermées entre les limites -1, $+1$, représentent les développements des fonctions $1(1+x)$, $(1+x)^{\mu}$, et supposant μ réel, on prouverait encore que pour des valeurs de x imaginaires et déterminées par l'équation (17) ces deux séries sont convergentes comme la série (14), tant que z demeure comprise entre les limites (21).

Quant à la série

$$1 \,,\quad x \,,\quad \frac{x^2}{1.2} \,,\quad \frac{x^3}{1.2.3} \,,\quad \text{etc.....} \tag{24}$$

qui, pour des valeurs réelles de x représente le développement de e^x, on la trouvera convergente pour toute valeur imaginaire, mais finie de la variable x.

---

§ 15. *Des exponentielles imaginaires. Développements des fonctions* $\cos x$, $\sin x$.

Désignons à l'ordinaire par e la base des logarithmes Népériens, et par A un nombre quelconque. Si la variable x est réelle, les deux fonctions

$$e^x \,,\quad A^x$$

seront toujours développables, par les formules (12) et (20) du § 7 en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de x, en sorte qu'on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.....} \tag{1}$$

$$A^x = 1 + x\,1(A) + \frac{x^2[1(A)]^2}{1.2} + \frac{x^3[1(A)]^3}{1.2.3} + \text{etc.....} \tag{2}$$

D'autre part, come en posant

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{[1(A)]^n}{1.2\ldots n} \,,$$

on en conclut

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{ou} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1(A)}{n+1} \,,$$

puis, en faisant croître indéfiniment le nombre n,

$$\omega = lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 ;$$

il suit du 3.e théorème du § précédent que les séries

$$(3) \qquad 1, \; x, \; \frac{x^2}{1.2}, \; \frac{x^3}{1.2.3}, \; \text{etc.....}$$

$$(4) \qquad 1, \; x\,l(A), \; \frac{x^2[l(A)]^2}{1.2}, \; \frac{x^3[l(A)]^3}{1.2.3}, \; \text{etc.....}$$

resteront convergentes si la variable x devient imaginaire, sans que son module se réduise à $\pm\infty$, c'est-à-dire pour toute valeur imaginaire et finie de x. Cela posé, après avoir démontré l'équation (2) dans le cas où la variable x est réelle, concevons qu'on étende cette équation au cas même où la variable x devient imaginaire et qu'on s'en serve alors pour fixer le sens de la notation A^x, c'est-à-dire, pour définir une exponentielle imaginaire. En prenant

$$A = e$$

on réduira la formule (2) à la formule (1), par laquelle se trouvera définie l'exponentielle imaginaire e^x; et comme, en remplaçant x par $x\,l(A)$ dans l'équation (1), on fera coïncider son second membre avec celui de l'équation (2), il est clair qu'on pourra fixer encore le sens des notations

$$A^x, \quad e^x$$

à l'aide de la formule (1) jointe à la suivante

$$(5) \qquad A^x = e^{x\,l(A)} .$$

Observons maintenant que l'équation (1) du § 7 pouvant être étendue au cas où α et x deviennent des expressions imaginaires, on en tirera, comme dans le § 7,

$$(6) \qquad lim\,(1+\alpha)^m = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.....}$$

pourvu que, le nombre entier m venant à croître indéfiniment, l'expression imaginaire α s'approche indéfiniment de la limite zéro, mais de manière à vérifier la condition

$$(7) \qquad \lim (m\alpha) = x.$$

On aura donc, sous cette condition

$$(8) \qquad \lim (1 + \alpha)^m = e^x,$$

quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de x. Ainsi, en particulier, comme on vérifiera la condition (7), en posant

$$\alpha = \frac{x}{m},$$

la formule (8) donnera généralement

$$(9) \qquad e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Si dans la formule (9) on remplace x par y on obtiendra la formule semblable

$$e^y = \lim \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m,$$

et de cette dernière jointe à la formule (9) on tirera

$$(10) \qquad e^x . e^y = \lim \left\{1 + \frac{1}{m}\left(x + y + \frac{xy}{m}\right)\right\}^m.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(x + y + \frac{xy}{m}\right),$$

on en conclura

$$\lim m\alpha = \lim \left(x + y + \frac{xy}{m}\right) = x + y,$$

par conséquent

$$\lim (1 + \alpha)^m = e^{x+y}.$$

Donc la formule (10) pourra être réduite à

$$(11) \qquad e^x . e^y = e^{x+y}.$$

Si dans cette dernière on remplace x et y par $x\,\mathrm{l}(A)$ et $y\,\mathrm{l}(A)$, on trouvera, en ayant égard à l'équation (5)

(12) $$A^x \, . \, A^y = A^{x+y} \, .$$

Ainsi les formules (11), (12) qui expriment une propriété fondamentale des exponentielles dont les exposants sont réels, s'étendent au cas même où les exposants deviennent imaginaires. Ajoutons que des ces formules on déduit immédiatement les suivantes

(13) $$e^{x+y+z+\dots} = e^x \, . \, e^y \, . \, e^z \, \dots..$$

(14) $$A^{x+y+z+\dots} = A^x \, . \, A^y \, . \, A^z \, \dots..$$

qnel que soit le nombre m des variables x, y, z, ... ; puis, en posant

$$x = y = z = \dots..$$

(15) $$e^{mx} = (e^x)^m$$

(16) $$A^{mx} = (A^x)^m \, .$$

Enfin, si dans les formules (11) et (12) on remplace x par $x - y$ on en déduira immédiatement les deux suivantes

(17) $$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \, ,$$

(18) $$A^{x-y} = \frac{A^x}{A^y} \, .$$

Concevons à présent que, dans l'équation (9), on écrive $x\sqrt{-1}$ au lieu de x, et que dans la formule ainsi obtenue, savoir,

(19) $$e^{x\sqrt{-1}} = lim \left(1 + \frac{x}{m}\sqrt{-1}\right)^m$$

on attribue à x une valeur réelle. Si l'on pose

(20) $$r = \left(1 + \frac{x^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \text{arctang}\, \frac{x}{m} \, ,$$

on aura

$$(21) \qquad 1 + \frac{x}{m}\sqrt{-1} = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

$$(22) \qquad \left(1 + \frac{x}{m}\sqrt{-1}\right)^m = r^m\,(\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt).$$

De plus, comme en vertu de la seconde des formules (20), l'arc t aura pour limite zéro, l'équation (77) du § 12 donnera

$$lim\,\frac{\text{tang}\,t}{t} = lim\,\frac{x}{mt} = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$lim\,mt = x.$$

Enfin, puisque la première des équations (6), (7) [§ 7] entraîne toujours la seconde, et qu'on a évidemment

$$lim\,\frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{m^2} = lim\,\frac{x^2}{2m} = 0,$$

on trouvera encore

$$lim\,r^m = lim\left(1 + \frac{x^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}} = e^0 = 1.$$

Donc on tirera de l'équation (20)

$$(23) \qquad lim\left(1 + \frac{x}{m}\sqrt{-1}\right)^m = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

et la formule (19) donnera

$$(24) \qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

Ainsi, toute expression imaginaire qui a l'unité pour module, et peut en conséquence s'écrire comme il suit

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

x désignant un arc réel, se confond avec une exponentielle imaginaire et de la forme

$$e^{x\sqrt{-1}}.$$

Si l'on attribuait à x une valeur en partie réelle, en partie imaginaire, si par exemple on supposait

$$x = y + z\sqrt{-1},$$

y, z désignant des quantités réelles, on tirerait de la formule (11) jointe à la formule (24)

$$(25) \qquad e^{y+z\sqrt{-1}} = e^{y}(\cos z + \sqrt{-1}\sin z).$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace y et z par $y\,\mathrm{l}(A)$ et $z\,\mathrm{l}(A)$, on en conclura, eu égard à la formule (5),

$$(26) \qquad A^{y+z\sqrt{-1}} = A^{y}\left\{\cos[z\,\mathrm{l}(A)] + \sqrt{-1}\sin[z\,\mathrm{l}(A)]\right\}.$$

Les formules (26), (27) fournissent immédiatement les valeurs des exponentielles

$$e^{x}, \qquad A^{x}$$

correspondantes à une valeur imaginaire quelconque de la variable x.

Lorsque dans la formule (24) on remplace x par $-x$, on obtient la suivante

$$(27) \qquad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

de laquelle on tire, en la combinant avec la formule (24),

$$(28) \qquad 2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}, \qquad 2\sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29) \qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces dernières formules subsistent, comme les équations (24) et (27) pour une valeur réelle quelconque de la variable x. En les étendant au cas même où x devient imaginaire, on pourra s'en servir, pour fixer dans ce dernier cas le sens des notations

$$\cos x, \qquad \sin x.$$

Si, à l'aide de l'équation (1) on développe, suivant les puissances entières et positives, le premier membre de la formule (24), on trouvera

(30) $$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} ...$$

par conséquent

(31) $$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.....}, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.....}. \end{cases}$$

Les formules (31) qu'on peut aussi déduire des équations (29) subsistent pour des valeurs finies quelconques, réelles ou imaginaires de la variable x.

De la formule (24) jointe aux formules (20), (22), (25), (26) du § 13 * il résulte que, si a, b désignant deux quantités réelles quelconques, on pose

(32) $$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \zeta = \text{arctang}\,\frac{b}{a},$$

on aura, pour des valeurs positives de a, non seulement

(33) $$a + b\sqrt{-1} = \rho e^{\zeta\sqrt{-1}},$$

mais encore

(34) $$a + b\sqrt{-1} = \rho e^{\zeta\sqrt{-1}} e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1}},$$

k désignant un nombre entier quelconque, et pour des valeurs négatives de a, non seulement

(35) $$a + b\sqrt{-1} = -\rho e^{\zeta\sqrt{-1}},$$

mais encore

(36) $$a + b\sqrt{-1} = \rho e^{\zeta\sqrt{-1}} e^{\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}}.$$

En résumé l'on aura

(37) $$a + b\sqrt{-1} = \rho e^{\theta\sqrt{-1}},$$

* Pag. 107, lign. 11 lisez

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta)[\cos(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi].$$

la valeur de θ devant être déterminée par la première ou la seconde des deux formules

(38) $$\theta = \zeta \pm 2k\pi ,$$

(39) $$\theta = \zeta \pm (2k+1)\pi ,$$

suivant que la quantité réelle a sera positive ou négative. On peut donc énoncer la proposition suivante

1.er Théorème. *Toute expression imaginaire*

$$a + b\sqrt{-1}$$

est le produit d'un module réel

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

par une exponentielle imaginaire de la forme

$$e^{\theta\sqrt{-1}} ,$$

et dans laquelle θ *désigne un arc réel déterminé par l'une des équations* (38), (39).

A l'aide du 1.er théorème joint aux formules (13), (15), (17) il sera très-facile d'effectuer la multiplication, la division ou l'élévation à des puissances entières d'une ou de plusieurs expressions imaginaires dont les modules ne se réduiraient pas à l'unité. Car si l'on pose

$$a+b\sqrt{-1}=\rho e^{\theta\sqrt{-1}} ,\ a'+b'\sqrt{-1}=\rho' e^{\theta'\sqrt{-1}} ,\ a''+b''\sqrt{-1}=\rho'' e^{\theta''\sqrt{-1}} ,\ \text{etc...}$$

ρ, ρ', ρ'' ... étant des quantités positives, et θ, θ', θ'', ... des arcs réels, on trouvera

(40) $$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a''+b''\sqrt{-1})\ldots=\rho\rho'\rho''\ldots e^{(\theta+\theta'+\theta''\ldots)\sqrt{-1}} ,$$

(41) $$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{\rho}{\rho'}\, e^{(\theta-\theta')\sqrt{-1}}$$

(42) $$(a+b\sqrt{-1})^m = \rho^m\, e^{m\theta\sqrt{-1}} .$$

Il est aisé de s'assurer que la formule (34) s'accorde avec la formule (33), et la formule (36) avec la formule (35) attendu qu'on a généralement

(43) $$e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2k\pi = 1 ,$$

(44) $$e^{\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}} = \cos(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin(2k+1)\pi = -1 .$$

Il y a plus. Si t désigne un arc réel, on ne pourra évidemment satisfaire à l'équation imaginaire

(45) $$e^{t\sqrt{-1}} = 1,$$

ou, ce qui revient au même, aux deux équations réelles

(46) $$\cos t = 1, \quad \sin t = 0$$

qu'en posant

(47) $$t = \pm 2k\pi,$$

et attribuant au nombre k une valeur entière. Pareillement on ne pourra satisfaire à l'équation imaginaire

(48) $$e^{t\sqrt{-1}} = -1$$

ou, ce qui revient au même, aux deux équations réelles

(49) $$\cos t = -1, \quad \sin t = 0$$

qu'en posant

(50) $$t = \pm (2k + 1)\pi.$$

---

§ 16. *Relations qui existent entre les sinus ou cosinus des multiples d'un arc et les puissances entières des sinus et cosinus du même arc.*

Si, dans la formule (15) du § précédent, on remplace x par $x\sqrt{-1}$, elle donnera

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \left(e^{x\sqrt{-1}}\right)^m$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos mx + \sqrt{-1}\sin mx = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$$

$$= \cos x + m\cos^{m-1}x\sin x\sqrt{-1} - (m)_2\cos^{m-2}x\sin^2 x - (m)_3\cos^{m-3}x\sin^3 x\sqrt{-1} + \text{etc.}...$$

On aura donc

$$(1)\quad \begin{cases} \cos mx = \cos^m x - (m)_2 \cos^{m-2} x \sin^2 x + (m)_4 \cos^{m-4} x \sin^4 x + \text{etc.}.. \\ \sin mx = m \cos^{m-1} x \sin x - (m)_3 \cos^{m-3} x \sin^3 x + \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

ou , ce qui revient au même ,

$$(2)\quad \begin{cases} \cos mx = [1 - (m)_2 \tan^2 x + (m)_4 \tan^4 x - \text{etc.}..] \cos^m x , \\ \sin mx = [m \tan x - (m)_3 \tan^3 x + \text{etc.}\ldots\ldots] \cos^m x , \end{cases}$$

puis on en conclura

$$(3)\qquad \tan mx = \frac{m \tan x - (m)_3 \tan^3 x + \text{etc.}....}{1 - (m)_2 \tan^2 x + (m)_4 \tan^4 x - \text{etc.}....}$$

Si pour fixer les idées on pose successivement $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, etc. les formules (1) et (3) donneront

$$(4)\quad \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x , \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x , \end{cases}$$

$$(5)\quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} ,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x , \\ \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x , \end{cases}$$

$$(7)\quad \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} ,$$

$$(8)\quad \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x , \\ \sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x , \end{cases}$$

$$(9)\quad \tan 4x = \frac{4\ (\tan x - \tan^3 x)}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x} ,$$

etc.....

Les formules (1) dont les seconds membres entraînent toujours un nombre fini de termes, peuvent servir à déterminer $\cos mx$ et $\sin mx$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$.

On peut aussi exprimer les puissances de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction des sinus et cosinus des arcs multiples de x. En effet on tire des formules (28) du § précédent

$$(10)\left\{\begin{aligned} 2^m \cos^m x &= e^{mx\sqrt{-1}} + m\,e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \ldots\ldots + m\,e^{-(m-2)x\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}, \\ 2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x &= e^{mx\sqrt{-1}} - m\,e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \ldots\ldots \mp m\,e^{-(m-2)x\sqrt{-1}} \pm e^{-mx\sqrt{-1}}; \end{aligned}\right.$$

puis on en conclut 1.° en supposant m impair

$$(11)\left\{\begin{aligned} \cos^m x &= \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mx + (m)\cos(m-2)x + \ldots\ldots + (m)_{\frac{m-1}{2}}\cos x\right\}, \\ \sin^m x &= \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}\left\{\sin mx - m\sin(m-2)x + \ldots\ldots \pm (m)_{\frac{m-1}{2}}\sin x\right\}; \end{aligned}\right.$$

2.° en supposant m pair

$$(12)\left\{\begin{aligned} \cos^m x &= \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots\ldots + (m)_{\frac{m}{2}-1}\cos 2x + \frac{1}{2}(m)_{\frac{m}{2}}\right\}, \\ \sin^m x &= \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mx - m\cos(m-2)x + \ldots\ldots \mp (m)_{\frac{m}{2}-1}\cos 2x \pm \frac{1}{2}(m)_{\frac{m}{2}}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Si, pour fixer les idées on pose successivement $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, etc. ..... on tirera des formules (11) et (12)

$$(13)\left\{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1), \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1), \end{aligned}\right.$$

$$(14)\left\{\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x), \\ \sin^3 x &= \frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x), \end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \begin{cases} \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3), \\ \sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3), \end{cases}$$

etc.

---

§ 17. *Sommation des sinus ou cosinus d'une suite d'arcs représentée par les différents termes d'une progression arithmétique.*

Considérons une suite d'arcs en progression arithmétique ou de la forme

$$(1)\qquad \theta,\ \theta + t,\ \theta + 2t,\ \ldots\ \theta + (n-1)t,$$

θ, t désignant deux quantités réelles et n un nombre entier quelconque. On aura

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\theta + \cos(\theta + t) + \cos(\theta + 2t) + \ldots + \cos[\theta + (n-1)t] \\ + \{\sin\theta + \sin(\theta + t) + \sin(\theta + 2t) + \ldots + \sin[\theta + (n-1)t]\}\sqrt{-1} \\ = e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{(\theta + t)\sqrt{-1}} + e^{(\theta + 2t)\sqrt{-1}} + \ldots + e^{[\theta + (n-1)t]\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

D'autre part, si dans la formule (15) du § 14, savoir

$$(3)\qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

on pose

$$x = e^{t\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$1 + e^{t\sqrt{-1}} + e^{2t\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(n-1)t\sqrt{-1}} = \frac{e^{nt\sqrt{-1}} - 1}{e^{t\sqrt{-1}} - 1} = \frac{e^{\left(n - \frac{1}{2}\right)t\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}t\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{-1}}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$1 + e^{t\sqrt{-1}} + e^{2t\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(n-1)t\sqrt{-1}} = \frac{e^{\left(n - \frac{1}{2}\right)t\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{-1}}}{2\sin\frac{t}{2}\sqrt{-1}}.$$

On aura donc par suite

$$(4)\begin{cases} e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{(\theta+t)\sqrt{-1}}+e^{(\theta+2t)\sqrt{-1}}+\ldots\ldots+e^{[\theta+(n-1)t]\sqrt{-1}} \\ =\dfrac{e^{\left(\theta-\frac{1}{2}t\right)\sqrt{-1}}-e^{\left(\theta-\frac{1}{2}t+nt\right)\sqrt{-1}}}{2\sin\frac{t}{2}}\sqrt{-1} \\ =\dfrac{\sin\left(\theta-\frac{1}{2}t+nt\right)-\sin\left(\theta-\frac{1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}+\dfrac{\cos\left(\theta-\frac{1}{2}t\right)-\cos\left(\theta-\frac{1}{2}t+nt\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et la formule (2) fournira les deux équations réelles

$$(5)\begin{cases} \cos\theta+\cos(\theta+t)+\cos(\theta+2t)+\ldots+\cos[\theta+(n-1)t]=\dfrac{\sin\left(\theta-\frac{1}{2}t+nt\right)-\sin\left(\theta-\frac{1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}, \\ \sin\theta+\sin(\theta+t)+\sin(\theta+2t)+\ldots+\sin[\theta+(n-1)t]=\dfrac{\cos\left(\theta-\frac{1}{2}t\right)-\cos\left(\theta-\frac{1}{2}t+nt\right)}{2\sin\frac{t}{2}}. \end{cases}$$

Si dans les équations (5) l'arc θ se réduit à zéro, elles donneront

$$(6)\begin{cases} 1+\cos t+\cos 2t+\ldots\ldots+\cos(n-1)t=1+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}, \\ \sin t+\sin 2t+\ldots\ldots+\sin(n-1)t=\operatorname{tang}\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}. \end{cases}$$

Si dans les mêmes équations on pose $nt=2\pi$, ou $t=\frac{2\pi}{n}$, leurs seconds membres s'évanuiront. Enfin, si l'on pose $nt=\pi$, ou $t=\frac{\pi}{n}$, on trouvera

$$(7)\begin{cases} \cos\theta+\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\theta+\dfrac{n-1}{n}\pi\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \\ \sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\theta+\dfrac{n-1}{n}\pi\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}. \end{cases}$$

Soit maintenant s uoe longueur comptée sur une droite AB que renferme un certain plan $O\,O'\,O''$, que dans le même plan on mène par le point O 1.° une perpendiculaire MN à la droite AB, 2.° n autres droites qui comprennent entre elles des angles égaux dont chacuo aura évidemmeot pour mesure le rapport

$$\frac{2\,\pi}{2\,n} = \frac{\pi}{n}\,.$$

Le système de ces dernières droites offrira uoe espèce de *rose des vents* ; et si l'on nomme θ le plus petit des angles qu'elles formeot avec la droite MN, θ sera compris entre les limites 0, $\frac{\pi}{2\,n}$. Ajoutons que les diverses droites dont sera composée la rose des vents, formeront avec MN des aogles respectivemeot égaux aux différents termes de la progression arithmétique

$$\theta\,,\quad \theta + \frac{\pi}{n}\,,\quad \theta + \frac{2\,\pi}{n}\,,\quad \ldots\ldots\quad \theta + \frac{(n-1)\,\pi}{n}\,.$$

Cela posé, soient

$$a_0\,,\quad a_1\,,\quad a_2\,,\quad \ldots\ldots\quad a_{n-1}$$

les projections orthogonales de la longueur s sur les droites doot il s'agit. En vertu du 1.er théorème du § 12, a_m sera le produit de s par le cosinus de l'angle aigu compris entre une de ces droites et AB, ou en d'autres termes, par le sinus de l'un des deux aogles qui forme la même droite avec MN perpendiculaire AB. On aura donc

$$a_m = s\,\cos\left(\theta + \frac{m\,\pi}{n}\right),$$

et par suite

$$(8)\quad a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = s\left\{\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\,\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\theta + \frac{n-1}{n}\pi\right)\right\}.$$

Soit d'ailleurs μ la moyenne arithmétique eotre les projections a_0, a_1, ... a_{n-1} de la longueur s, eo sorte qu'on ait

$$(9)\qquad \mu = \frac{a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_{n-1}}{n}\,.$$

On tirera des formules (8) et (9), jointes à la seconde des équations (7)

$$n\,\mu = s\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2\,n}-\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{2\,n}},$$

par conséquent

(10) $$s = n\,\mu\,\frac{\sin\frac{\pi}{2\,n}}{\cos\left(\frac{\pi}{2\,n}-\theta\right)}.$$

Donc, puisque θ est compris entre les limites 0, $\frac{\pi}{2\,n}$, on conclura de l'équation (10) que la longueur s est renfermée entre les limites

$$n\,\mu\,\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\,n}, \quad n\,\mu\,\sin\frac{\pi}{2\,n},$$

ou, si l'on fait pour abréger,

(11) $$\frac{\pi}{2\,n} = \alpha,$$

entre les limites

(12) $$\frac{1}{2}\,\pi\,\mu\,\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}, \quad \frac{1}{2}\,\pi\,\mu\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Concevons à présent que le nombre n croisse indéfiniment. L'arc $\alpha = \frac{\pi}{2\,n}$ s'approchera indéfiniment de la limite zéro, et les rapports

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

de la limite 1 (voyez le § 12). Donc, pour des valeurs infinies de n, les expressions (12) deviendront égales entre elles et à $\frac{1}{2}\,\pi\,\mu$, et l'on pourra en dire autant de la longueur s. Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante.

1.er Théorème. *Si l'on nomme n le nombre des droites dont se compose une rose des vents tracée dans un plan quelconque, et μ la moyenne arithmétique entre les projections sur ces droites d'une longueur rectiligne s mesurée dans le même plan, cette longueur sera précisément équivalente à la limite vers laquelle converge le produit*

$$(13) \qquad \frac{1}{2}\pi\mu$$

pour des valeurs croissantes de n.

Si, en attribuant au nombre n une valeur considérable, on prend $\frac{1}{2}\pi\mu$ pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera représentée par la valeur numérique de la différence

$$s - \frac{1}{2}\pi\mu,$$

et puisque la longueur s est renfermée entre les quantités (12), nous pouvons conclure que l'erreur commise sera équivalente au produit de $\frac{1}{2}\pi\mu$ par une quantité renfermée entre les limites

$$(14) \qquad \frac{\text{tang}\,\alpha}{\alpha} - 1, \qquad 1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

D'ailleurs, en vertu des formules (31) du § 15, les différences

$$1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{1.2.3} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4.5} + \text{etc.},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{1}\,\frac{\alpha^2}{3} - \frac{1}{1.2.3}\,\frac{\alpha^4}{5} + \text{etc...}$$

seront développables en séries convergentes dont les termes alternativement positifs et négatifs offriront des valeurs numériques de plus en plus petites, lorsqu'on supposera

$$n = \text{ ou } > 2,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} = \text{ou} < \frac{\pi}{4} < 1.$$

Donc alors, en vertu du troisième théorême du § 6, on aura

(15) $$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{\alpha^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}\frac{1}{n^2}$$

et

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha<\frac{\alpha^2}{3}=\frac{\pi^2}{12}\frac{1}{n^2},$$

par conséquent

(16) $$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}-1<\frac{\pi^2\operatorname{séc}\alpha}{12}\frac{1}{n^2};$$

puis, en supposant

$$n=\text{ou}>3,$$

par suite

$$\alpha=\text{ou}<\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{séc}\alpha=\text{ou}<\frac{2}{\sqrt{3}},$$

et ayant égard aux conditions

$$\pi^2=(3,1415..)^2=9,869...<10,\quad \frac{\pi^2}{24}<\frac{10}{24}<1,\quad \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}<\frac{10}{\sqrt{108}}<1,$$

on tirera des formules (15), (16)

(17) $$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{1}{n^2},\quad \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}-1<\frac{1}{n^2}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.ᵉ Théorême. *Les mêmes choses étant posées que dans le théorême premier, si l'on prend pour valeur approchée de s la quantité*

$$\frac{1}{2}\pi\mu,$$

l'erreur commise ne surpassera pas le produit de cette valeur approchée par $\frac{1}{n^2}$ *pourvu que le nombre entier n ne soit pas inférieur à 3.*

§ 18. *Relations qui existent entre le périmètre d'un polygone plan et les sommes des projections des éléments de ce périmètre sur diverses droites. Rectifications des courbes planes.*

1.er Théorème. *Un polygone étant tracé dans un plan quelconque, si l'on nomme n le nombre des droites dont se compose une rose des vents construite dans le même plan, A la somme des projections absolues des divers côtés du polygone sur l'une de ces droites, M la moyenne arithmétique entre les valeurs de A correspondantes aux diverses droites, et S le périmètre du polygone, on aura sensiblement, pour des valeurs considérables de n,*

$$S = \frac{1}{2}\pi M. \tag{1}$$

De plus, si le nombre entier n surpasse 2, l'erreur que l'on commettra en prenant $\frac{1}{2}\pi M$ pour valeur approchée de S sera inférieure au produit de cette valeur approchée par $\frac{1}{n^2}$.

Démonstration. Soient

$$s, \quad s', \quad s'', \quad \ldots\ldots$$

les longueurs des divers côtés du polygone, et des

$$\mu, \quad \mu', \quad \mu'', \quad \ldots\ldots$$

les moyennes arithmétiques entre les projections de s, ou de s', ou de s'', ... sur les diverses droites dont se compose la rose des vents. On aura évidemment

$$S = s + s' + s'' + \ldots\ldots,$$

$$M = \mu + \mu' + \mu'' + \ldots\ldots,$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\pi M = \frac{1}{2}\pi\mu + \frac{1}{2}\pi\mu' + \frac{1}{2}\pi\mu'' + \ldots\ldots$$

D'autre part, si l'on prend pour valeurs approchées de

$$s, \quad s', \quad s'' \quad \ldots\ldots$$

les quantités

$$\frac{1}{2}\pi\mu, \quad \frac{1}{2}\pi\mu', \quad \frac{1}{2}\pi\mu'' \ldots\ldots,$$

les erreurs commises, en vertu des théorèmes 1 et 2 du § précédent, seront respectivement inférieures aux produits de ces quantités par $\frac{1}{n^2}$. Donc l'erreur commise sur la somme

$$s + s' + s'' + \ldots\ldots = S$$

sera inférieure au produit de $\frac{1}{n^2}$ par la somme

$$\frac{1}{2}\pi\mu + \frac{1}{2}\pi\mu' + \frac{1}{2}\pi\mu'' + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\pi M.$$

Cette erreur commise étant très-petite pour des valeurs considérables de n, on aura sensiblement alors $S = \frac{1}{2}\pi M$.

Corollaire 1.er Il est clair que la démonstration précédente est applicable non seulement à un polygone fermé, mais aussi à un polygone ouvert, c'est-à-dire, à une portion de polygone, et même à un système de polygones ou de portions de polygones quel que soit d'ailleurs le nombre de leurs côtés.

Corollaire 2.e Dans le cas particulier où l'on considère un polygone convexe et fermé, la somme A des projections des côtés du polygone sur une droite est évidemment double de ce qu'on pourrait appeller la projection du polygone, c'est-à-dire, double de la longueur $\mathfrak{A}$ qui renferme tous les points de cette droite avec lesquels peuvent coïncider les projections de points pris au hazard sur le périmètre du polygone. Par suite la moyenne arithmétique M entre les diverses valeurs de A correspondantes aux diverses droites dont se compose la rose des vents sera double de la moyenne arithmétique $\mathfrak{M}$ entre les diverses valeurs de $\mathfrak{A}$ qui représenteront les projections du polygone sur ces diverses droites, ou, si l'on veut, les dimensions du polygone mesurées parallèlement à ces mêmes droites. On peut donc encore énoncer la proposition suivante.

2.e Théorème. *Étant donné dans un plan quelconque un polygone convexe et fermé, si l'on nomme* n *le nombre des droites dont se compose une rose des vents construite dans le même plan,* M *la moyenne arithmétique entre les projections du polygone sur ces diverses droites, et* S *le périmètre du polygone, on aura sensiblement, pour des valeurs considérables de* n

(2) $$S = \pi\mathfrak{M}.$$

De plus, si le nombre entier n surpasse 2, l'erreur que l'on commettra, et prenant $\pi\mathfrak{M}$ pour valeur approchée de S, sera inférieure au produit de cette valeur approchée par $\frac{1}{n^2}$.

Concevons maintenant, que les polygones dont il est question dans les théorèmes 1 et 2 soient inscrits à des courbes données. Si les côtés de ces polygones deviennent infiniment petits et le nombre de ces côtés infiniment grand, le périmètre de chaque polygone aura pour limite la longueur ou le contour de la courbe circonscrite. Par suite on déduira immédiatement des théorèmes 1 et 2 ceux que nous allons énoncer.

3.e Théorème. *Étant donné dans un plan un contour quelconque S, si l'on nomme n le nombre des droites dont se compose une rose des vents construite dans le même plan, A la somme des projections absolues des diverses parties du contour sur une des droites, et M la moyenne arithmétique entre les valeurs de A correspondantes aux diverses droites, on aura sensiblement, pour des valeurs considérables de n,*

$$S = \frac{1}{2}\pi M. \qquad (1)$$

De plus, si le nombre entier n surpasse 2, l'erreur que l'on commettra en prenant $\frac{1}{2}\pi M$ *pour valeur approchée de S sera inférieure au produit de cette valeur approchée par* $\frac{1}{n^2}$.

Corollaire 1.er Ce théorème subsisterait encore, si l'on représentait par S le système d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes fermées ou non fermées.

Corollaire 2.e La valeur approchée de S étant calculée à l'aide de la formule (1), l'erreur commise ne dépassera pas la neuvième partie de cette valeur, si l'on prend $n = 3$, la vingtcinquième partie si l'on prend $n = 5$, et la centième partie, si l'on prend $n = 10$. Dans le premier et le second cas M sera la moyenne arithmétique entre les sommes des projections absolues des éléments de S sur trois ou cinq droites respectivement parallèles aux côtés d'un hexagone ou d'un décagone régulier.

Corollaire 3.e Si S représente le système de plusieurs courbes formées et tracées dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R, si d'ailleurs on suppose que le système de ces courbes ne puisse être traversé par une droite en plus de $2m$ points, on aura évidemment

$$A < 2m \cdot 2R,$$

et par suite

(3) $$M < 2m \cdot 2R;$$

puis, en observant que la formule (2) devient rigoureusement exacte pour des valeurs infinies de n, on tirera de cette formule jointe à la condition (3)

(4) $$S < m \cdot 2\pi R.$$

4.e Théorème. *Étant donnée dans un plan quelconque une courbe convexe et fermée, si l'on nommme n le nombre des droites dont se compose une rose des vents construite dans le même plan, M la moyenne arithmétique entre les projections de la courbe sur ces diverses droites, et S le périmètre de la courbe, on aura sensiblement, pour des valeurs considérables de n,*

(2) $$S = \pi \mathfrak{M}.$$

De plus, si le nombre entier n surpasse 2, l'erreur que l'on commettra en prenant $\pi \mathfrak{M}$ pour valeur approchée de S sera inférieure au produit de cette valeur approchée par $\frac{1}{n^2}$.

Corollaire 1.er Une courbe convexe est, comme l'on sait, celle qu'une droite ne peut traverser en plus de deux points. Cela posé, concevons que S représente le périmètre d'une courbe fermée et convexe, tracée dans l'intérieur d'un cercle dont le rayon soit R. On tirera de la formule (4), en y posant $m = 1$,

$$S < 2\pi R.$$

Corollaire 2.e Si S représente la circonférence d'un cercle décrit avec le rayon R, la projection de S sur une droite quelconque, et par suite la quantité M elle-même se réduiront évidemment au diamètre $2R$. Donc alors la formule (2) donnera, comme on devait s'y attendre

(5) $$S = 2\pi R.$$

§ 19. *Sur les puissances fractionnaires, ou irrationnelles, ou négatives d'une expression imaginaire. Résolution des équations binomes et de quelques équations trinomes.*

Pour rendre plus clair ce que nous avons à dire sur les puissances fractionnaires, ou irrationnelles, ou négatives des expressions imaginaires, il sera utile de rappeler d'abord les définitions relatives aux puissances des nombres.

Élever A à la *puissance* du *degré* x (x étant positif), c'est chercher un autre nombre qui soit formé de A par la multiplication comme x est formé de l'unité par l'addition. Pour bien comprendre la définition précédente, il faut distinguer trois cas, suivant que x est entier, fractionnaire ou irrationnel.

Lorsque x désigne un nombre entier, ce nombre est la somme de plusieurs unités. La puissance de A du degré x doit donc alors être le produit d'autant de facteurs égaux à A qu'il y a d'unités dans x. Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$x = 3 = 1 + 1 + 1,$$

on aura

$$A^3 = A\,A\,A.$$

Lorsque x représente une fraction $\frac{m}{n}$ (m et n étant deux nombres entiers), il faut, pour obtenir cette fraction, 1.° chercher un nombre qui répété n fois reproduise l'unité; 2.° répéter m fois le nombre dont il s'agit. Il faudra donc alors, pour obtenir la puissance de A du degré $\frac{m}{n}$, 1.° chercher un nombre B tel que la multiplication de n facteurs égaux à ce nombre reproduise A, 2.° former un produit de m facteurs égaux au nombre B. Quand on suppose en particulier $m = 1$, la puissance de A que l'on considère, se réduit à celle dont le degré est $\frac{1}{n}$, et se trouve déterminée par la seule condition que le nombre A soit équivalent au produit de n facteurs égaux à cette même puissance. Si, pour fixer les idées, on suppose $x = \frac{2}{3}$, alors aux équations

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \qquad \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$

correspondront les deux suivantes,

$$A^{\frac{1}{3}}\ A^{\frac{1}{3}}\ A^{\frac{1}{3}} = A, \qquad\qquad A^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}}\ A^{\frac{1}{3}}.$$

Lorsque x est un nombre irrationnel, on peut en obtenir en nombres rationnels des valeurs de plus en plus approchées. On prouve facilement que, dans la même hypothèse, les puissances de A marquées par les nombres rationnels dont il s'agit, s'approchent de plus en plus d'une certaine limite. Cette limite est la puissance de A du degré x.

D'après les définitions qui précèdent, la première puissance d'un nombre n'est autre chose que ce nombre lui-même. Sa seconde puissance, ou son *carré*, et sa troisième puissance, ou son *cube* sont les produits de deux ou trois facteurs égaux à ce même nombre. Quant à la puissance du degré zéro, elle sera la limite vers laquelle converge la puissauce du degré x, tandisque le nombre x décroit indéfiniment. Il est aisé de faire voir que cette limite se réduit à l'unité, d'où il résulte qu'on a en général

(1) $$A^0 = 1.$$

Ajoutons que si l'on désigne par x, y, z, des nombres quelconques, on établira facilement les formules

(2) $$A^x\, A^y = A^{x+y},$$

(3) $$A^x\, A^y\, A^z \,\ldots\ldots = A^{x+y+z+\ldots},$$

(4) $$(A^x)^y = A^{xy} = (A^y)^x;$$

et que, si dans l'équation (2) on pose $x + y = s$, on en tirera, pour des valeurs de x inférieures à s,

(5) $$A^{s-x} = \frac{A^s}{A^x}.$$

La formule (5), étendue au cas où x devient supérieur à s, par exemple au cas où s s'évanouit, sert alors à définir les puissances négatives de A. C'est donc uniquement comme définition d'une puissance négative du degré $-x$ que l'on pose l'équation

(6) $$A^{-x} = \frac{1}{A^x}.$$

En partant de cette dernière formule, on prouvera sans peine que les équations (2), (3), (4), (5) subsistent lors même que les nombres $x, y, z, \ldots\ldots s$, ou quelques uns d'entre eux se changent en des quantités négatives.

Dans l'élévation du nombre A à la puissance dont le degré est x, le nombre A s'appelle *racine*, et la quantité x qui marque le degré de la puissance se nomme *exposant*. Extraire du nombre A la racine du degré x, c'est chercher un nouveau nombre B qui, élevé à la puissance du degré x, reproduise A; ce nouveau nombre sera évidemment la puissaoce de A du degré $\frac{1}{x}$, puisqu'en vertu de la formule (4) on aura

$$\left(A^{\frac{1}{x}}\right)^x = A.$$

Soit maintenant $a + b\sqrt{-1}$ une expression imaginaire quelconque, a, b désignant deux quantités réelles. En généralisant les notions que nous venons de rappeler, on obtiendra les définitions suivantes relatives aux puissances fractionnaires ou négatives de $a + b\sqrt{-1}$.

Extraire la racine n^{me} de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, ou, en d'autres termes, élever cette expression à la puissance du degré $\frac{1}{n}$ (n désignant un nombre entier quelconque), c'est former une nouvelle expression imaginaire dont la puissance n^{me} reproduise $a + b\sqrt{-1}$. Ce problème admettant plusieurs solutions comme on le verra tout-à-l'heure, il en résulte que l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ a plusieurs racines du degré n.

Pour élever l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ à la puissance fractionnaire du degré $\frac{m}{n}$, il faut, en supposant la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression, 1.° extraire la racine n^{me} de l'expression donnée; 2.° élever cette racine à la puissance entière du degré m.

Enfin élever l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ à la puissance négative du degré $-m$ ou $-\frac{1}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, c'est diviser l'unité par la puissance du degré m, ou $\frac{1}{n}$, ou $\frac{m}{n}$.

En vertu des définitions précédentes, extraire la racine n^{me} de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, c'est déterminer les valeurs imaginaires de x qui vérifient l'équation binome

(7) $$x^n = a + b\sqrt{-1},$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme

(8) $$x^n = \rho\, e^{\theta\sqrt{-1}},$$

pourvu que, les valeurs de ρ et ζ étant

(9) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \zeta = \text{arctang}\,\frac{b}{a},$$

et k désignant un nombre entier quelconque, l'on prenne

(10) $$\theta = \zeta \pm 2k\pi,$$

si la quantité a est positive, et

(11) $$\theta = \zeta \pm (2k + 1)\pi,$$

si la quantité a est négative. Or il est clair qu'on vérifiera l'équation

(12) $$x^n = \rho\, e^{\zeta\sqrt{-1}}\, e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1}},$$

en prenant

(13) $$x = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}}\, e^{\pm\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et l'équation

(14) $$x^n = \rho\, e^{\zeta\sqrt{-1}}\, e^{\pm(2k + 1)\pi\sqrt{-1}},$$

en prenant

(15) $$x = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}}\, e^{\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt{-1}}.$$

Il y a plus. On peut aisément s'assurer que toutes les racines de l'équation (8) sont comprises dans la formule (13) lorsque a est positif, et dans la formule (15) lorsque a est négatif. Effectivement représentons par

$$r\, e^{t\sqrt{-1}},$$

une quelconque des valeurs de x propres à vérifier l'équation (8), r étant un module positif, et t un arc réel. En vertu du troisième théorème du § 13, on aura

$$r^n = \rho, \qquad r = \rho^{\frac{1}{n}};$$

et, comme l'équation (8) donnera

$$r^n e^{nt\sqrt{-1}} = \rho e^{\theta\sqrt{-1}},$$

on en conclura, 1.°, si a est positif,

$$e^{nt\sqrt{-1}} = e^{\theta\sqrt{-1}} = e^{\zeta\sqrt{-1}},$$

puis en multipliant de part et d'autre par l'exponentielle $e^{-\zeta\sqrt{-1}}$

$$e^{(nt-\zeta)\sqrt{-1}} = 1,$$

par conséquent (voyez les formules 45, 47, 48 et 50 du § 15)

$$nt - \zeta = \pm 2k\pi, \qquad t = \frac{\zeta}{n} \pm \frac{2k\pi}{n};$$

2.° si a est négatif

$$e^{nt\sqrt{-1}} = e^{\theta\sqrt{-1}} = e^{(\zeta\pm\pi)\sqrt{-1}},$$

par conséquent

$$nt - (\zeta \pm \pi) = \pm 2k\pi, \qquad t = \frac{\zeta}{n} \pm \frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Si l'on suppose en particulier

$$a = 1, \qquad b = 0,$$

on trouvera

$$\rho = 1, \qquad \zeta = 0,$$

et l'équation (7) ou (8), réduite à

(16) $$x^n = 1,$$

aura pour racines les diverses valeurs de x, que l'on peut déduire de la formule

(17) $$x = e^{\pm \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

en prenant pour k des nombres entiers. J'ajoute que, pour obtenir toutes les racines de l'équation (16), il suffira d'employer les valeurs entières de k comprises entre les limites $0, \frac{n}{2}$. En effet, considérons une valeur de k située hors de ces mêmes limites; et soit alors h le nombre entier le plus voisin du rapport $\frac{k}{n}$. La différence entre les deux nombres h, $\frac{k}{n}$ sera tout au plus $= \frac{1}{2}$, de sorte qu'on aura

(18). $$\frac{k}{n} = h \pm \frac{k'}{n},$$

$\frac{k'}{n}$ étant une fraction égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$, et par suite k' un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à $\frac{n}{2}$. Or, comme on tirera successivement de la formule (18)

$$\frac{2k\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{2k'\pi}{n},$$

$$e^{\pm \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}} = e^{\pm \frac{2k'\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

il en résulte que, sans altérer les valeurs de x fournies par la formule (17), on peut y remplacer le nombre entier k, lorsqu'il est situé hors des limites $0, \frac{n}{2}$ par un autre nombre entier compris entre les mêmes limites.

Si l'on réduit le nombre k 1.° à sa limite inférieure, c'est-à-dire à zéro; 2.° en supposant que n soit pair, à la limite supérieure $\frac{n}{2}$, on obtiendra les seules racines réelles que puisse admettre l'équation (16), savoir :

(19) $$x = 1, \quad \text{et} \quad x = -1,$$

la seconde disparaissant toujours, lorsque n est impair, les autres racines correspondantes aux valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \frac{n-1}{2},$$

du nombre k, si n est impair, et aux valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \frac{n-2}{2},$$

du même nombre k, si n est pair, seront imaginaires et conjuguées deux à deux. Donc l'équation (16) offrira, si n est impair, une racine réelle et $n-1$ racines imaginaires; si n est pair, deux racines réelles et $n-2$ racines imaginaires. Le nombre total des racines distinctes sera dans tous les cas égal au degré n de l'équation (16).

En combinant la formule

$$x = e^{\pm\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n},$$

avec les formules (67), (71) du § 12, et posant successivement

$$n = 3,\quad n = 4,\quad \text{etc.....}$$

on trouvera, pour les racines imaginaires de l'équation $x^3 = 1$,

$$x = e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

pour les racines imaginaires de l'équation $x^4 = 1$,

$$x = e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1},$$

etc.,...

Si l'on suppose dans l'équation (7)

$$a = -1,\quad b = 0,$$

on trouvera encore

$$\rho = 1, \quad \zeta = 0,$$

et l'équation (7) ou (8) réduite à

(20) $$x^n = -1,$$

aura pour racines les diverses valeurs de x que l'on peut déduire de la formule

(21) $$x = e^{\pm \frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

en prenant pour k des nombres entiers. De plus, comme la différence entre le rapport

$$\frac{2k+1}{2n}$$

et le nombre entier h le plus voisin de ce rapport sera évidemment une fraction de numérateur impair, inférieure ou tout au plus égale à $\frac{1}{2}$, par conséquent une fraction de la forme

$$\frac{2k'+1}{2n}$$

$2k'+1$ étant un nombre impair égal ou inférieur à n, comme d'ailleurs la formule

$$\frac{2k+1}{2n} = h \pm \frac{2k'+1}{2n}$$

entraînera les suivantes

$$\frac{2k+1}{n}\pi = 2h\pi \pm \frac{2k'+1}{n}\pi,$$

$$e^{\frac{2k+1}{n}\pi\sqrt{-1}} = e^{\pm\frac{2k'+1}{n}\pi\sqrt{-1}};$$

il est clair qu'on obtiendra toutes les racines distinctes de l'équation (20), en attribuant successivement au nombre k toutes les valeurs entières comprises entre les limites $0, \frac{n-1}{2}$. Au reste k ne peut atteindre la seconde de ces limites et devenir égal à

$\frac{n-1}{2}$, qu'autant que n est impair, et c'est alors seulement que l'équation (20) admet une racine réelle, savoir,

(22) $$x = -1.$$

Les autres racines correspondantes aux valeurs

$$0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{n-3}{2},$$

du nombre k si n est impair, et aux valeurs

$$0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{n-2}{2},$$

du même nombre k si n est pair, seront évidemment toutes imaginaires et conjuguées deux à deux. Donc l'équation (20) offrira, si n est impair, une racine réelle et $n-1$ racines imaginaires, si n est pair, n racines imaginaires. Le nombre des racines distinctes sera donc toujours égal au degré n de cette même équation.

En combinant la formule

$$x = e^{\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt{-1}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

avec les formules (67), (71) du § 12, et posant successivement

$$n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4, \quad \text{etc.....}$$

on trouvera pour les racines imaginaires de l'équation $x^2 = -1$

$$x = e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1},$$

pour les racines imaginaires de l'équation, $x^3 = -1$

$$x = e^{\pm\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

pour les racines imaginaires de l'équation $x^4 = -1$

$$x = e^{\pm\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \qquad x = e^{\pm\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

ou plus simplement

$$x = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

etc.....

D'après ce qu'on vient de voir, les racines n^{mes} réelles ou imaginaires de chacune des quantités -1, $+1$ sont en nombre égal à n. D'ailleurs, pour obtenir toutes les valeurs de x que donne la formule (13) ou (15) il suffit de multiplier successivement l'une de ces valeurs, par exemple,

$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}} \text{ ou } \rho^{\frac{1}{n}} e^{(\zeta \pm \pi)\sqrt{-1}},$$

par les diverses racines de l'unité du degré n, ou bien encore de multiplier la seule expression

(23)
$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}},$$

par les racines n^{mes} de l'unité, si a est positif, et par les racines n^{mes} de -1, si a est négatif. Ajoutons que, dans le premier cas, l'expression (23) sera précisément une des racines n^{mes} de $a + b\sqrt{-1}$, c'est-à-dire une valeur particulière de x propre à vérifier l'équation (7). Cette valeur particulière est celle que nous désignerons par la notation

(24)
$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

dont nous ne ferons usage qu'autant que la partie réelle de l'expression imaginaire renfermée entre les parenthèses sera positive. Cela posé, en admettant que ρ et ζ soient déterminés par les formules (9), on aura, pour des valeurs positives de a,

(25)
$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}} = (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

et pour des valeurs négatives de a,

(26)
$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\zeta}{n}\sqrt{-1}} = (-a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Par suite on tirera des formules (13), (15) 1.° pour des valeurs positives de a

$$x = (a + b\sqrt{-2})^{\frac{1}{n}}\, e^{\pm \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}} \qquad (27)$$

2.° pour des valeurs négatives de a

$$x = (-a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}\, e^{\pm \frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt{-1}} \qquad (28)$$

et l'on pourra énoncer la proposition suivante :

1.er Théorême. *Le nombre des racines distinctes de l'équation binome*

$$x^n = a + b\sqrt{-1},$$

est égal au degré n *de cette équation. Ces racines ont un module commun équivalent à la puissance* $\frac{1}{n}$ *du module de* $a + b\sqrt{-1}$. *Elles sont représentées, pour des valeurs paires de* a, *par les seconds membres des formules* (13) *ou* (27), *pour des valeurs impaires de* a, *par les seconds membres des formules* (15) *ou* (28) ; *et, pour les obtenir toutes, il suffit de multiplier successivement l'une d'entre elles par les diverses racines* n^{mes} *de l'unité, c'est-à-dire par les diverses valeurs de l'expression*

$$e^{\pm \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}. \qquad (29)$$

Les racines n^{mes} de $a + b\sqrt{-1}$ étant représentées par les seconds membres des équations (13) ou (15), les puissances m^{mes} de ces racines (m étant un nombre entier premier à n), ou, en d'autres termes, les diverses valeurs de la puissance de $a + b\sqrt{-1}$ du degré $\frac{m}{n}$ seront évidemment comprises, si a est positif, dans la formule

$$\rho^{\frac{m}{n}}\, e^{\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}}\, e^{\pm \frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}}, \qquad (30)$$

et si a est négatif, dans la formule

$$\rho^{\frac{m}{n}}\, e^{\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}}\, e^{\pm \frac{(2k+1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}. \qquad (31)$$

Dans le premier cas seulement, l'une de ces valeurs sera de la forme

$$\rho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}}.$$

Cette valeur qu'on obtiendra, en posant dans la formule (30) $k = 0$, est celle que nous désignerons par la notation

$$(32)\qquad (a + b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

de sorte qu'en supposant les quantités ρ, ζ déterminées par les équations (9), on aura pour des valeurs positives de a

$$(33)\qquad \rho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m\zeta}{n}\sqrt{-1}} = (a + b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

et pour des valeurs négatives de a

$$(34)\qquad \rho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m\zeta}{n}\sqrt{-1}} = (-a - b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

Par suite les diverses valeurs de la puissance de $a + b\sqrt{-1}$ du degré $\frac{m}{n}$ peuvent se déduire, pour des valeurs positives de a, de la formule

$$(35)\qquad (a + b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} e^{\pm\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et, pour des valeurs négatives de a, de la formule

$$(36)\qquad (-a - b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} e^{\pm\frac{(2k+1)m\pi}{2n}\sqrt{-1}}.$$

Il est bon d'observer que chacun des facteurs

$$(37)\qquad e^{\pm\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

$$(38)\qquad e^{\pm\frac{(2k+1)m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

compris dans les formules (30) et (31), ou (35) et (36) se réduit à l'une des racines n^{mes} de la quantité $+1$, ou -1. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'on obtiendra successivement toutes les racines, en attribuant successivement au nombre k dans la formule (37) les valeurs entières comprises entre les limites $0, \frac{n}{2}$ et dans la formule (38) les valeurs entières comprises entre les limites $0, \frac{n-1}{2}$; pourvû que, suivant l'hypothèse admise, le nombre m soit premier à n.

Observons encore qu'en vertu des formules (25) et (32) on aura généralement pour des valeurs positives de a

$$(39)\qquad (a+b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}\right\}^{m}.$$

Si l'on divise l'unité par la puissance de $a+b\sqrt{-1}$ du degré $\frac{m}{n}$, c'est-à-dire, par le produit (30) ou (31), on obtiendra la puissance de $a+b\sqrt{-1}$ du degré $-\frac{m}{n}$. Les diverses valeurs de cette puissance seront comprises, si a est positif, dans la formule

$$(40)\qquad \rho^{-\frac{m}{n}}\, e^{-\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}}\, e^{\mp\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et, si a est négatif, dans la formule

$$(41)\qquad \rho^{-\frac{m}{n}}\, e^{-\frac{m}{n}\sqrt{-1}}\, e^{\mp\frac{(2k+1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}.$$

Dans le premier cas seulement, l'une de ces valeurs sera de la forme

$$(42)\qquad \rho^{-\frac{m}{n}}\, e^{-\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}}.$$

Cette valeur qu'on obtiendra, en posant dans la formule (40) $k=0$, est celle que nous désignerons par la notation

$$(43)\qquad (a+b\sqrt{-1})^{-\frac{m}{n}},$$

de sorte qu'en supposant les quantités ρ et ζ déterminées par les équations (9), on aura, pour des valeurs positives de a,

(44) $$\rho^{-\frac{m}{n}} e^{-\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}} = (a + b\sqrt{-1})^{-\frac{m}{n}},$$

et, pour des valeurs négatives de a,

(45) $$\rho^{-\frac{m}{n}} e^{-\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}} = (-a - b\sqrt{-1})^{-\frac{m}{n}}.$$

En général m et n étant des nombres entiers quelconques, les deux notations

(46) $$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}, \qquad (a + b\sqrt{-1})^{-\frac{m}{n}}$$

seront comme la notation

$$(a + b)\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

uniquement employées dans le cas où l'expression imaginaire renfermée entre les parenthèses offrira une partie réelle positive, à moins que la fraction $\frac{m}{n}$ ne se réduise à un nombre entier.

Si la fraction $\frac{m}{n}$ se réduit à un nombre entier m, alors les notations (46) pourront être employées, quelque soit le signe de la quantité a, et de la formule

(47) $$a + b\sqrt{-1} = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

on déduira immédiatement les deux suivantes

(48) $$(a + b\sqrt{-1})^m = \rho^m e^{m\theta\sqrt{-1}}, \qquad (a + b\sqrt{-1})^{-m} = \rho^{-m} e^{-m\theta\sqrt{-1}}.$$

Si au contraire $\frac{m}{n}$ ne se réduit pas à un nombre entier, alors, en posant pour abréger,

$$\mu = \pm \frac{m}{n},$$

on tirera des formules (33) et (44), mais seulement pour des valeurs positives de a,

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu}=\rho^{\mu}\, e^{\mu\zeta\sqrt{-1}}. \tag{49}$$

L'équation (49) subsistant pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires de la quantité positive ou négative désignée par μ, l'analogie nous porte à l'étendre au cas même où la quantité μ devient irrationnelle. C'est ce que nous ferons désormais. En conséquence, si μ est irrationnel, la notation

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$$

sera employée pour désigner le produit

$$\rho^{\mu}\, e^{\mu\zeta\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire la limite vers laquelle converge l'expression

$$(a+b\sqrt{-1})^{\pm\frac{m}{n}}=\rho^{\pm\frac{m}{n}}e^{\pm\frac{m}{n}\zeta\sqrt{-1}},$$

tandis que l'on fait converger la quantité positive ou négative, $\pm\frac{m}{n}$ vers une limite égale à μ.

La résolution de l'équation (7) entraîne celle d'une équation trinome de la forme :

$$x^{2n}+px^{n}+q=0. \tag{50}$$

En effet cette dernière, pouvant s'écrire comme il suit

$$\left(x^{n}+\frac{p}{2}\right)^{2}=\frac{p^{2}}{4}-q, \tag{51}$$

pourra être remplacée, si $\frac{p^2}{4}-q$ est positif, par le système des deux équations binomes comprises dans la formule

$$x^{n}=-\frac{p}{2}\pm\left(\frac{p^{2}}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{52}$$

et, si $\frac{p^2}{4} - q$ est négatif, par le système des deux équations binomes comprises dans la formule

$$(53) \qquad x^n = -\frac{p}{2} \pm \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}.$$

Si n se réduit à l'unité, l'équation (50) sera réduite à l'équation du second degré

$$(54) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

et admettra deux racines réelles inégales, et comprises dans la formule

$$(55) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \left(\frac{p^2}{4} - q\right)^{\frac{1}{2}},$$

si l'on a

$$(56) \qquad \frac{p^2}{4} > q,$$

deux racines imaginaires inégales comprises dans la formule

$$(57) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1},$$

si l'on a

$$(58) \qquad \frac{p^2}{4} < q,$$

enfin deux racines réelles égales et déterminées par la formule

$$(59) \qquad x = -\frac{p}{2},$$

si l'on a

$$(60) \qquad \frac{p^2}{4} = q.$$

En terminant ce paragraphe nous ferons relativement aux racines n^{mes} de l'unité représentées par les diverses valeurs de l'expression (29) une observation qui n'est pas sans importance.

Si l'on pose, pour abréger,

(61) $$\lambda = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et, si l'on nomme l, l' deux quantités entières positives ou négatives, mais tellement choisies que $l' - l$ ne soit pas divisible par n, les expressions

(62) $$\lambda^l = e^{\frac{2l\pi}{n}\sqrt{-1}}, \quad \lambda^{l'} = e^{\frac{2l'\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

seront deux racines n^{mes} de l'unité, distinctes l'une de l'autre, puisque la différence

$$e^{\frac{2l\pi}{n}\sqrt{-1}} - e^{\frac{2l'\pi}{n}\sqrt{-1}} = e^{\frac{2l\pi}{n}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{\frac{2(l'-l)\pi}{n}\sqrt{-1}}\right),$$

ne peut s'évanouir qu'autant que

$$\frac{l' - l}{n}$$

est un nombre entier. Donc les expressions (62) seront deux racines n^{mes} de l'unité distinctes l'une de l'autre, si la différence $l' - l$ est inférieure à n, d'où il résulte que pour obtenir toutes les racines de l'unité du degré n, il suffit de prendre n termes consécutifs de la progression géométrique

(63) $$\ldots\ldots \lambda^{-3}, \lambda^{-2}, \lambda^{-1}, 1, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \ldots\ldots$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens, par exemple, les termes

(64) $$1, \lambda, \lambda^2, \ldots\ldots \lambda^{n-1}.$$

§ 20. *Logarithmes des expressions imaginaires, et logarithmes imaginaires des quantités réelles.*

Soit

$$a + b\sqrt{-1}$$

une expression imaginaire quelconque, a, b désignant deux quantités réelles. Ce qu'on appelle le *logarithme* de $a + b\sqrt{-1}$, dans le système dont la base est A, c'est une seconde expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, dans laquelle les quantités α, β sont tellement choisies que l'on ait

(1) $$A^{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1},$$

et par conséquent, eu égard à la formule (5) du § 15,

(2) $$e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\mathrm{l}(A)} = a + b\sqrt{-1}.$$

Ainsi, en particulier un *logarithme Népérien* de $a + b\sqrt{-1}$ sera une expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ tellement choisie que l'on ait

(3) $$e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}.$$

D'ailleurs, si l'on fait

(4) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \zeta = \text{arctang}\,\frac{b}{a},$$

et, si l'on désigne par k un nombre entier quelconque, on trouvera, pour des valeurs positives de a,

(5) $$a + b\sqrt{-1} = \rho\, e^{(\zeta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{l}(\rho) + (\zeta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}},$$

et, pour des valeurs négatives de a,

(6) $$a + b\sqrt{-1} = \rho\, e^{[\zeta \pm (2k+1)\pi]\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{l}(\rho) + [\zeta \pm (2k+1)\pi]\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, il est clair qu'on vérifiera la formule (3), si a est positif, en prenant

(7) $$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\rho) + (\zeta \pm 2k\pi)\sqrt{-1},$$

et, si a devient négatif, en prenant

$$(8)\qquad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\rho) + [\zeta \pm (2k+1)\pi]\sqrt{-1}.$$

Il y a plus. On peut aisément s'assurer que la formule (7) ou (8) fournira tous les logarithmes Népériens de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$. Car, en vertu du 2.e théorème du § 13, le module e^{α} du premier membre de l'équation (3) devra se confondre avec le module ρ de l'expression $a + b\sqrt{-1}$. On aura donc

$$e^{\alpha} = \rho, \qquad \alpha = \mathrm{l}(\rho);$$

D'autre part, si, en adoptant la valeur précédente de α, on réduit k à zéro dans la formule (5) ou (6), on tirera de cette formule, jointe à l'équation (3), 1.° pour des valeurs positives de a

$$e^{\beta\sqrt{-1}} = e^{\zeta\sqrt{-1}},$$

par conséquent

$$e^{(\beta-\zeta)\sqrt{-1}} = 1, \quad \beta - \zeta = \pm 2k\pi, \quad \beta = \zeta \pm 2k\pi,$$

2.° pour des valeurs négatives de a

$$e^{\beta\sqrt{-1}} = e^{(\zeta\pm\pi)\sqrt{-1}},$$

par conséquent

$$e^{[\beta-(\zeta\pm\pi)]\sqrt{-1}} = 1, \quad \beta - (\zeta\pm\pi) = \pm 2k\pi, \quad \beta = \zeta \pm (2k+1)\pi.$$

On prouvera de même que les valeurs de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ propres à vérifier la formule (2), ou les logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ relatifs au système dont la base est A, sont tous compris, pour des valeurs positives de a, dans la formule

$$(9)\qquad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{\mathrm{l}(\rho) + (\zeta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(A)} = L(\rho) + (\zeta \pm 2k\pi)\,L(e).\sqrt{-1},$$

et, pour des valeurs négatives de a, dans la formule

$$(10)\qquad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{\mathrm{l}(\rho) + [\zeta \pm (2k+1)\pi]\sqrt{-1}}{\mathrm{l}(A)} = L(\rho) + (\zeta \pm 2k\pi)\,L(e).\sqrt{-1}.$$

Si l'on suppose en particulier $a + b\sqrt{-1} = \pm 1$, par conséquent $\rho = 0$, $\zeta = 0$, les formules (7), (8), ou (9), (10) donneront pour les logarithmes Népériens de $+1$, non seulement zéro, mais encore toutes les expressions imaginaires de la forme

(11) $$\pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad \pm 2k\pi L(e)\sqrt{-1},$$

et, pour les logarithmes Népériens de -1, toutes les expressions imaginaires de la forme

(12) $$\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad \pm(2k+1)\pi L(e)\sqrt{-1}.$$

Généralement, si $a + b\sqrt{-1}$ se réduit à une quantité réelle a, on pourra, en vertu des formules (7), (8), ou (9), (10) considérer comme logarithmes de a, 1.° si a est positif, toutes les expressions comprises dans la formule

(13) $$\mathrm{l}(a) \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad L(a) \pm 2k\pi L(e)\sqrt{-1};$$

2.° Si a est négatif, toutes les expressions comprises dans la formule

(14) $$\mathrm{l}(-a) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad L(-a) \pm (2k\pi+1)L(e)\sqrt{-1}.$$

Observons d'ailleurs qu'on peut obtenir toutes ces expressions, en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles, par exemple, lorsque a est positif au logarithme réel $\mathrm{l}(a)$ ou $L(a)$ les diverses logarithmes imaginaires de l'unité.

Lorsque, b n'étant pas nul, a est positif, l'un des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$, savoir, celui qui correspond à une valeur nulle de k, est précisément

(15) $$\mathrm{l}(\rho) + \zeta\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad L(\rho) + \zeta L(e)\sqrt{-1},$$

suivant que l'on prend pour base le nombre e ou le nombre A. C'est ce logarithme que nous désignerons par la notation

(16) $$\mathrm{l}(a + b\sqrt{-1}), \quad \text{ou} \quad L(a + b\sqrt{-1})$$

dont nous ne ferons usage, qu'autant que la portion réelle de l'expression imaginaire renfermée entre les parenthèses sera positive. Cela posé, en admettant que ρ et ζ soient déterminés par les formules (4), on aura, pour des valeurs positives de a,

(17) $$\begin{cases} \mathrm{l}(\rho) + \zeta\sqrt{-1} = \mathrm{l}(a + b\sqrt{-1}), \\ L(\rho) + \zeta L(e)\sqrt{-1} = L(a + b\sqrt{-1}), \end{cases}$$

et, pour des valeurs négatives de a,

$$(18)\quad \begin{cases} l(\rho) + \zeta\sqrt{-1} = l(-a - b\sqrt{-1}), \\ L(\rho) + \zeta L(e)\sqrt{-1} = L(-a - b\sqrt{-1}). \end{cases}$$

Par suite les divers logarithmes de l'expression $a + b\sqrt{-1}$ se déduiront, pour des valeurs positives de a, de la formule

$$(19)\quad l(a + b\sqrt{-1}) \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad L(a + b\sqrt{-1}) \pm 2k\pi L(e)\sqrt{-1},$$

et, pour des valeurs négatives de a, de la formule

$$(20)\quad l(-a - b\sqrt{-1}) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad L(-a - b\sqrt{-1}) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

L'inspection de ces diverses formules conduit immédiatement à la proposition suivante.

1.er Théorème. *Une quantité réelle ou une expression imaginaire quelconque a toujours une infinité de logarithmes imaginaires, dont l'un devient réel, lorsque l'expression donnée se réduit à une quantité positive. De plus, pour obtenir tous ces logarithmes, il suffit d'ajouter à l'un d'entre eux, les divers logarithmes de l'unité compris dans la formule*

$$\pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad \pm 2k\pi L(e).\sqrt{-1}.$$

Ajoutons qu'en vertu des formules (17) et de la formule (49) du § 19, on aura toujours, en désignant par n une expression imaginaire dont la partie réelle soit positive,

$$(21)\quad L(x) = \frac{l(x)}{l(A)} = l(x) . L(e),$$

et

$$(22)\quad x^{\mu} = e^{\mu l(x)} = A^{\mu L(x)}.$$

Soient maintenant

$$(23)\quad x = a + b\sqrt{-1}, \quad y = a' + b'\sqrt{-1}, \quad z = a'' + b''\sqrt{-1}, \text{ etc.....}$$

plusieurs expressions imaginaires dont les parties réelles

$$a, \quad a', \quad a'', \quad .....$$

soient positives. Si, en désignant par

$$\rho, \quad \rho', \quad \rho'', \quad \dots$$

leurs modules, on pose

$$\zeta = \text{arctang}\,\frac{b}{a}, \quad \zeta' = \text{arctang}\,\frac{b'}{a'}, \quad \zeta'' = \text{arctang}\,\frac{b''}{a''}, \quad \dots\dots$$

on trouvera

$$(24) \qquad x = \rho\, e^{\zeta\sqrt{-1}}, \quad y = \rho' e^{\zeta'\sqrt{-1}}, \quad z = \rho'' e^{\zeta''\sqrt{-1}}, \quad \dots\dots$$

et par suite

$$(25) \qquad x\,y\,z\,\dots\dots = \rho\,\rho'\,\rho''\,\dots\dots\, e^{(\zeta+\zeta'+\zeta''+\dots)\sqrt{-1}}.$$

Si d'ailleurs l'arc

$$\zeta + \zeta' + \zeta'' + \dots\dots$$

est compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, la partie réelle du produit $x\,y\,z\,\dots\dots$ sera positive, et l'équation (25) entraînera les suivantes

$$\mathrm{l}\,(x\,y\,z\dots) = \mathrm{l}\,(\rho\,\rho'\,\rho''\dots) + (\zeta+\zeta'+\zeta''+\dots)\sqrt{-1},$$

$$L\,(x\,y\,z\dots) = L\,(\rho\,\rho'\,\rho''\dots) + (\zeta+\zeta'+\zeta''+\dots)\,L(e)\sqrt{-1}$$

qu'on pourra encore écrire comme il suit :

$$(26) \qquad \begin{cases} \mathrm{l}(x\,y\,z\,\dots\dots) = \mathrm{l}\,(x) + \mathrm{l}\,(y) + \mathrm{l}\,(z) + \dots\dots \\ L(x\,y\,z\,\dots\dots) = L(x) + L(y) + L(z) + \dots\dots \end{cases}$$

Pareillement si a étant positif, et μ désignant une quantité réelle quelconque, le produit $\mu\zeta$ reste compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, la première des équations (23) donnera non seulement

$$(27) \qquad x^{\mu} = (a + b\sqrt{-1})^{\mu} = \rho^{\mu}\, e^{\mu\zeta\sqrt{-1}},$$

mais encore

$$l(x^\mu) = l(\rho^\mu) + \mu\zeta\sqrt{-1} = \mu[l(\rho) + \zeta\sqrt{-1}],$$

$$L(x^\mu) = L(\rho^\mu) + \mu\zeta L(e)\sqrt{-1} = \mu[L(\rho) + \zeta L(e)\sqrt{-1}],$$

ou, ce qui revient au même,

(28)
$$\begin{cases} l(x^\mu) = \mu\, l(x), \\ L(x^\mu) = \mu\, L(x). \end{cases}$$

Ainsi les formules (26), (28) qui sont généralement vraies, lorsque x, y, z désignent des quantités réelles positives, en vertu des propriétés fondamentales des logarithmes réels, ne peuvent pas être étendues, sans de notables restrictions, au cas où x, y, z, ... deviennent imaginaires. Dans ce dernier cas, les formules (26) subsisteront si, les valeurs de x, y, z, ... étant déterminées par les formules (23), et leurs parties réelles a, a', a'', ... étant positives la somme

(29)
$$\text{arctang}\,\frac{b}{a} + \text{arctang}\,\frac{b'}{a'} + \text{arctang}\,\frac{b''}{a''} + \dots\dots$$

reste comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ $+\frac{\pi}{2}$, et les formules (28) si, la quantité a étant positive le produit

(30)
$$\mu\ \text{arctang}\,\frac{b}{a}$$

reste compris entre les mêmes limites.

§ 21. *Des séries imaginaires doubles ou multiples.*

Si l'on suppose que les quantités comprises dans le tableau n.° (1) du § 8 se changent en autant d'expressions imaginaires, la série double, dont ces quantités étaient les différents termes, deviendra une série double imaginaire, dont le terme général sera représenté par

$$u_{m,\ m'}$$

m, m' étant deux nombres entiers quelconques. Pareillement on peut imaginer une série imaginaire triple dont le terme général

$$u_{m,\ m',\ m''}$$

serait une fonction imaginaire des trois indices entiers m, m', m'', et finalement une série imaginaire multiple dont le terme général serait une fonction imaginaire de m indices

$$m,\ m',\ m'',\ m''',\ \ldots\ldots$$

chacun de ces indices pouvant recevoir successivement les valeurs entières

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots$$

Cela posé, nommons s_n la somme formée par l'addition d'un nombre fini ou même infini de termes de la série multiple, cette somme étant composée de manière qu'elle renferme au moins tous les termes dans lesquels la somme des indices est inférieure à n, et que jamais elle ne comprenne un terme correspondant à des indices donnés, sans renfermer en même tems tous les termes qu'on en déduit en remplaçant ces mêmes indices ou quelques uns d'entre eux par des indices moindres. Si, toutes les fois que les deux conditions précédentes sont remplies, la somme s_n converge pour des valeurs croissantes de n vers une limite fixe s la série multiple sera dite *convergente*, et la limite en question s'appelera la *somme* de la série.

Dans le cas contraire la série imaginaire multiple sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Si, dans le premier cas, on pose

$$s = s_n + r_n,$$

r_n sera le reste de la série imaginaire multiple, et ce reste, qui représentera ce qu'on peut nommer la somme de tous les termes non compris dans s_n, deviendra infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. En partant de ces définitions on prouvera sans peine que pour rendre les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5 du § 8 applicables aux séries imaginaires multiples, il suffit de substituer dans ces théorèmes les modules des différents termes à leurs valeurs numériques. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer les propositions suivantes.

1.er Théorème. *Lorsque les modules des divers termes d'une série imaginaire multiple forment une série réelle convergente, la série imaginaire est elle-même convergente.*

2.e Théorème. *Supposons que, pour un module de la variable n inférieur à c, la fonction y de x soit développable en une première série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, et que pour un module de la variable y inférieur à c', la fonction z de y soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de y. z sera développable en une nouvelle série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, toutes les fois que le module de x, étant inférieur à c, produira pour les termes de la première série des modules dont la somme sera inférieure à c'.*

Pour montrer une application du 2.me théorème, supposons que, la valeur de x étaot imaginaire, on preune

$$(1) \qquad y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(2) \qquad z = 1 + \frac{\mu y}{1} + \frac{\mu^2 y^2}{1.2} + \frac{\mu^3 y^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Comme les séries comprises dans les seconds membres des formules (1) et (2) seront convergentes, la première pour tout module de la variable x inférieur à l'unité, la seconde pour toute valeur imaginaire et finie de la variable y, on tirera de ces formules, en attribuant à x un module $r < 1$,

$$(3) \qquad z = 1 + \mu\left(n - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) + \frac{\mu^2}{1.2}\left(n - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right)^2 + \text{etc.}\ldots$$

Or, en vertu du 2.me théorème, le second membre de la formule (3) devra se réduire pour $\mu < 1$, à la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x. D'ailleurs, ce second membre coïncidant pour des valeurs réelles de x, avec le second membre de la formule (4) du § 11, se traosformera,

par cette réduction, en celui que présente la formule (7) du même paragraphe. On aura donc, pour $r < 1$,

$$z = e^{\mu y} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.....}$$

En d'autres termes, tant que le module de x restera inférieur à l'unité, la fonction y déterminée par la formule (1) vérifiera l'équation

$$(4) \qquad e^{\mu y} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{etc............}$$

Si l'on suppose en particulier $\mu = 1$, la formule (4) donnera simplement

$$(5) \qquad e^y = 1 + x.$$

---

§ 22. *Développements des fractions* $l(1+x)$, $L(1+x)$, $(1+x)^{\mu}$ *dans le cas où la variable* x *devient imaginaire.*

Concevons que l'on attribue à la variable x une valeur imaginaire et de la forme

$$(1) \qquad x = r e^{t\sqrt{-1}} = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t),$$

r désignant un module positif et t un arc réel. Si l'on fait, pour abréger,

$$(2) \qquad s = \text{arctang} \frac{r \sin t}{1 + r \cos t},$$

et, si l'on désigne par μ une quantité réelle, on trouvera, pour toutes les valeurs

positives de $1 + r\cos t$, par conséquent pour toutes les valeurs du module ρ comprises entre les limites $0, 1$,

(3) $$1 + x = (1 + 2r\cos t + r^2)^{\frac{1}{2}} e^{s\sqrt{-1}},$$

(4) $$\mathrm{l}(1 + x) = \frac{1}{2}\mathrm{l}(1 + 2r\cos t + r^2) + s\sqrt{-1},$$

(5) $$(1 + x)^{\mu} = (1 + 2r\cos t + r^2)^{\frac{\mu}{2}} e^{\mu s\sqrt{-1}} = e^{\mu \mathrm{l}(1+x)}.$$

D'autre part, en supposant la variable x réelle et comprise entre les limites $-1, +1$, nous avons trouvé

(6) $$\mathrm{l}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.....}$$

(7) $$(1 + x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3} x^3 + \text{etc.....}$$

J'ajoute maintenant que les formules (6), (7) subsistent encore pour des valeurs imaginaires de x, lorsque le module r est inférieur à l'unité. C'est ce que l'on démontrera sans peine en opérant comme il suit.

Concevons que, la variable x étant imaginaire, et son module inférieur à l'unité, on pose

(8) $$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc......};$$

ce qui est permis, puisqu'alors la série comprise dans le second membre de la formule (8) est convergente. La formule (8) entraînera l'équation

(9) $$e^y = 1 + x,$$

(voyez le § précédent). Donc y sera l'un des logarithmes imaginaires et Népériens de $1 + x$. En d'autre termes, on aura

$$y = \mathrm{l}(1 + x) \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

(10) $$\mathrm{l}(1 + x) = y \mp 2k\pi\sqrt{-1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.} \mp 2k\pi\sqrt{-1},$$

k désignant un nombre entier, par conséquent

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+2r\cos t+r^2)=r\cos t-\frac{\mu^2}{2}\cos 2t+\frac{r^3}{3}\cos 3t-\text{etc...}$$

et

$$(12)\qquad s=\operatorname{arctang}\frac{r\sin t}{1+2r\cos t+r^2}=r\sin t-\frac{r^2}{2}\sin 2t+\frac{r^3}{3}\sin 3t-\text{etc.}\mp 2k\pi.$$

On tire d'ailleurs de la formule (12)

$$(13)\qquad \pm k=\frac{1}{2\pi}\left\{\left(r\sin t-\frac{r^2}{2}\sin 2t+\frac{r^3}{3}\sin 3t-\ldots\right)-\operatorname{arctang}\frac{r\sin t}{1+2r\cos t+r^2}\right\},$$

et comme, en vertu du théorème 7.e (§ 6), la somme

$$r\sin t-\frac{r^2}{2}\sin 2t+\frac{r^3}{3}\sin 3t-\text{etc...}$$

sera, pour des valeurs de r comprises entre 0 et 1, fonction continue de chacune des variables r et t, il est clair qu'on pourra en dire autant du second membre de l'équation (13). Donc ce second membre variera par degrés insensibles avec r et t, entre les limites $r=0$, $r=1$, $t=-\infty$, $t=\infty$. Cette condition ne pourrait être remplie si, r et t venant à varier par degrés insensibles, la quantité entière $\pm k$ changeait brusquement de valeur. Donc, pour toutes les valeurs de r et t comprises entre les limites dont il s'agit, $\pm k$ conservera une valeur constante égale à celle que fournit l'équation (12) pour $r=0$, c'est-à-dire une valeur nulle, et les formules (10), (12) devront être réduites, la première à la formule (6), la seconde à la suivante

$$(14)\qquad \operatorname{arctang}\frac{r\sin t}{1+2r\cos t+r^2}=r\sin t-\frac{r^2}{2}\sin 2t+\frac{r^3}{3}\sin 3t-\text{etc...}$$

Si l'on suppose en particulier $t=\frac{\pi}{2}$, l'équation (14) donnera

$$(15)\qquad \operatorname{arctang} r=r-\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}-\text{etc.....};$$

et, comme cette dernière ne changera pas de forme quand on y remplacera r par $-r$, on en conclura, en écrivant x au lieu de $\pm r$, que l'équation

$$(16) \qquad \text{arctang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc....}$$

subsiste pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre les limites

$$x = -1, \quad x = 1.$$

Si l'on prend $x = 1$, on aura arctang $(1) = \frac{\pi}{4}$, et par conséquent

$$(17) \qquad \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) = 3,14159265 \ldots..$$

On trouvera encore, en attribuant à x une valeur imaginaire dont le module soit inférieur à l'unité,

$$(18) \qquad L.(1+x) = l\,(1+x).L(e) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc....}\right) L(e).$$

Observons maintenant que, la variable x étant toujours positive et son module inférieur à l'unité, la formule (8) entraîne non seulement l'équation (9) mais encore celle-ci

$$(19) \qquad e^{\mu y} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1-2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1-2-3}x^3 + \text{etc.....}$$

(μ désignant une quantité positive quelconque). On aura donc encore

$$e^{\mu l(1+n)} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1-2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1-2-3}x^3 + \text{etc...},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1-2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1-2-3}x^3 + \text{etc......}$$

Donc la formule (6) continue de subsister, dans le cas où x, étant imaginaire, offre un module $r < 1$. Alors en égalant entre elles, dans les deux membres de la formule,

1.° les parties réelles, 2.° les quantités qui sont multipliées par $\sqrt{-1}$, on obtient les deux équations

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}&(1+2r\cos t+r^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos\mu s=1+\mu r\cos t+\frac{\mu(\mu-1)}{1-2}r^2\cos 2t-\text{etc.},\\&(1+2r\cos t+r^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin\mu s=\mu r\sin t+\frac{\mu(\mu-1)}{1-2}r^2\sin 2t+\text{etc.....}\end{aligned}\right.$$

Si dans ces dernières jointes à la formule (2) on pose $t=\frac{\pi}{2}$ on trouvera

$$s=\text{arctang}\, r,$$

$$r=\text{tang}\, s,\quad (1+2r\cos t+r^2)^{\frac{1}{2}}=(1+r^2)^{\frac{1}{2}}=\text{séc}\, s=\frac{1}{\cos s},$$

et par suite

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos\mu s=\left(1-\frac{\mu(\mu-1)}{1-2}\text{tang}^2 s+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1-2-3-4}\text{tang}^4 s-\text{etc.}\right)\cos^{\mu} s,\\&\sin\mu s=\left(\mu\,\text{tang}\, s-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1-2-3}\text{tang}^3 s+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\cos^{\mu} s;\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos\mu s=[1-(\mu)_2\,\text{tang}^2 s+(\mu)_4\,\text{tang}^4 s-\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots]\cos^{\mu} s,\\&\sin\mu s=[\mu\,\text{tang}\, s-(\mu)_3\,\text{tang}^3 s+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]\cos^{\mu} s;\end{aligned}\right.$$

puis on en conclura

$$(23)\qquad \text{tang}\,\mu s=\frac{\mu\,\text{tang}\, s-(\mu)_3\,\text{tang}^3 s+\text{etc.....}}{1-(\mu)_2\,\text{tang}^2 s+(\mu)_4\,\text{tang}^4 s-\text{etc.}}$$

Comme d'ailleurs les équations (22), (23) ne changent pas de forme quand on y remplace s par $-s$, il est clair qu'elles subsistent, quelle que soit la quantité μ, pour toutes les valeurs de s comprises entre les limites

$$(24)\qquad s=-\text{arctang}\,(1)=-\frac{\pi}{4},\quad s=\text{arctang}\,(1)=\frac{\pi}{4}.$$

Lorsque l'exposant μ se réduit à un nombre entier m, les équations (22), (23) se réduisent aux équations (2) et (3) du § 16, et peuvent alors être étendues à des valeurs quelconques de l'arc s.







